02, December, 2006

# 「高校理系数学における微積分の応用と図形の計量に関する問題精選・１」

大学受験でも重要事項に挙げられ、将来社会人になって理工系職種に進む学生にとって必須事項となる解析学の基礎としての微積分に関する問題と、受験数学では合格・不合格の分岐点にもなり、工学系に進む生徒にとっては今後も図形的センス（空間的センス）を磨かねばならないために大切といえる図形の計量に関する問題を集めた。

各人の学習の一助になってもらえれば幸いである。

１． 線分 CA および BC の長さがそれぞれ２および１であり、線分 AB を斜辺にもつ直角三角形 ABC がある。線分 AB、BC、CA 上にそれぞれ点 P、Q、R をとり、∠QPR＝３０度になるように３点 P、Q、R を動かすとき、線分 QR の長さの最小値と、そのときの CQ および CR の長さを求めよ。

２． 半径１の全く同じ３つのガラス球が机においてある。以下の各設問に答えよ。

（１） この３つのガラス球を机上で完全に覆うことが出来る最も小さい半球の蓋の半径を計算せよ。

（２） （１）のとき、３つのガラス球と机のいずれにも接するような小ガラス球を挿入したい。そのような小ガラス球の半径を求めよ。

（３） （１）のとき、蓋と３つのガラス球の上部の隙間に出来る空間に小さな別のガラス球を挿入したいとする。そのような小ガラス球の半径の最大値を求めよ。

（４） （１）のとき、２つのガラス球と蓋と机のいずれにも接するような小ガラス球を挿入したいとする。そのような小ガラス球の半径を求めよ。

＜S＆Ｊ塾作成問題＞

３． 空間内に互いに直交し一点Ｏで交わる３本の直線 $k, m, n$ がある。各直線 $k, m, n$ を軸にもち半径１の円を底面にもつ無限に長い直円柱をそれぞれ $P, Q, R$ とする。この３つの無限直円柱 $P, Q, R$ の共通部分の立体（相貫体）を $S = P \cap Q \cap R$ とする。立体 $S$ の体積を、積分計算によって求めよ。

４． 古代ギリシャの時代より黄金比$\lambda = (\sqrt{5}-1)/2$は調和の取れた比として考えられてきた。ギリシャ神殿の正面の縦横比や、ミロのビーナス像の恥丘までの上半身長と下半身長の比などが黄金比であることはよく知られた事実である。以下の各問題は、黄金比と密接に関連した代数および幾何学の問題である。以下の各問題に答えよ。

（４－１）Fibonacci 数列

$\{c_N\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$ とは、

$$c_{N+2} = c_N + c_{N+1}$$
$$c_1 = c_2 = 1$$

を満たす漸化式で与えられた数列のことである。この数列について各設問に答えよ。

（１） 任意の自然数 N に対して、次の関係式が成り立つことを証明せよ。

$$c_{N+1}{}^2 - c_N \cdot c_{N+2} = (-1)^{N+1}$$

（２） 任意の自然数 N に対し、$c_N$は自然数であり、隣接する二項$c_N$と$c_{N+1}$は互いに素である（最大公約数が 1 である）ことを証明せよ。

（３） 三項間漸化式の特性方程式 $t^2 = t+1$ の相異なる 2 実数解$\alpha, \beta\ (\alpha > \beta)$を用いれば、

$$\begin{cases} c_{N+2} - \alpha \cdot c_{N+1} = \beta(c_{N+1} - \alpha \cdot c_N) \\ c_{N+2} - \beta \cdot c_{N+1} = \alpha(c_{N+1} - \beta \cdot c_N) \end{cases}$$

と記述できることを示し、Fibonacci 数列$\{c_N\}$の一般項が

$$c_N = \frac{1}{\alpha-\beta} \cdot \left(\alpha^N - \beta^N\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^N - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^N \right\}$$

で与えられることを証明せよ。また黄金比との対応で、

$$\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\alpha} = -\beta$$

であることを確認せよ。

（４－２）以下の連分数で記述された無限数列$\{a_N\}$を考える。

$$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{1+1}\left(=\frac{1}{2}\right),\ a_3=\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}\left(=\frac{2}{3}\right),\ a_4=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}\left(=\frac{3}{5}\right),\ \ldots,$$

この数列を二項間漸化式で表現すれば、以下のように記述できる。

$$a_{N+1}=\frac{1}{1+a_N}$$
$$a_1=1$$

この数列は、以下の極限値が存在し収束することが予想される。

$$\lim_{N\to\infty}a_N=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}}$$

この連分数数列に関して以下の各設問に答えよ。

（１）　この数列$\{a_N\}$は、（４－１）で述べた **Fibonacci 数列**$\{c_N\}$を用いれば、任意の自然数 N に対し、以下のように記述できることを証明せよ。

$$a_N=\frac{c_N}{c_{N+1}}$$

（２）　**Fibonacci 数列**$\{c_N\}$の一般項を用いて、極限値$\lim_{N\to\infty}a_N$が黄金比$\lambda=(\sqrt{5}-1)/2$に一致することを証明せよ。

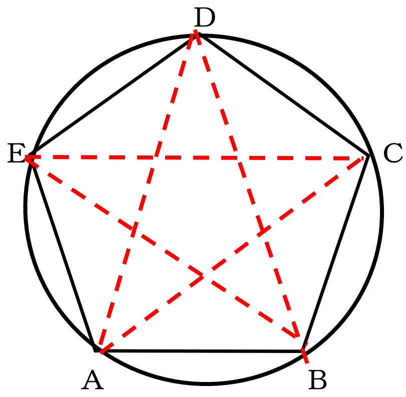
（３）　$\alpha$を、$\alpha=\frac{1}{1+\alpha}$を満たす正の数として、任意の自然数 N に対して不等式

$$|a_{N+1}-\alpha|<\frac{2}{3}\cdot|a_N-\alpha|$$

が成り立つことを証明し、極限値$\lim_{N\to\infty}a_N$が黄金比$\lambda$に一致することを証明せよ。

（４）　（４－１）の（２）より、任意の自然数 N に対し、$c_N$は自然数で、隣接する二項$c_N$と$c_{N+1}$は互いに素であるから、この数列$\{a_N\}$の各項は既約分数であることがわかる。任意の自然数 N に対して、$c_{N+1}$を分母にもつ分数のうちで、$a_N$が黄金比$\lambda$に最も近い既約分数であることを証明せよ。
（つまり、この連分数数列$\{a_N\}$は**無理数である黄金比**$\lambda$**に収束する最良の有理数数列**であることがいえる。）

（４－３）黄金比が図形に現れる典型的な例が正五角形である。偶像崇拝を禁じたイスラム教世界では、タイル装飾に星型や正五角形などの幾何学模様をよく見ることがあるが、それも黄金比の調和美と関連しているのであろうか。以下の各設問に答えよ。




（１）　正五角形の一辺の長さを対角線の長さで割った値が黄金比$\lambda$に一致することを初等幾何的に相似三角形の性質を用いて証明せよ。

（２）　正五角形の内部に５本の対角線によって囲まれた小正五角形を作ることができる。この小正五角形ともとの大正五角形の面積の比を求めよ。

（３）　**De Moivre の定理**より、代数方程式$z^5 = 1$の解は複素平面上で正五角形を構成することが分かる。この方程式を相反方程式の解法を用いて解くことで、半径１の円に内接する正五角形の一辺の長さを求めよ。

（ヒント：$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$と因数分解し、四次方程式が相反方程式であることに留意して、

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = 1 \quad および \qquad z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = x \in \Re$$

とおくと、$x$に関する二次方程式に帰着される。）

（４）　与えられた円に内接する正五角形を、ギリシャ以来の幾何学の伝統としてコンパスと直線を引くためだけの定規を用いて作図する方法を述べ、作図せよ。

（４－４）**Ptolemy（プトレマイオス）の定理**および円に内接する多角形に関する以下の設問に答えよ。

（１）　円に内接する四角形 ABCD において、

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

が成立すること、およびその逆も成立することを初等幾何的に証明せよ。

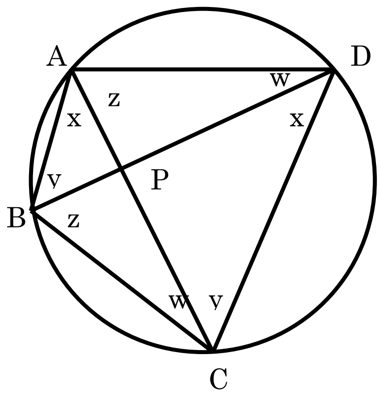
（２）　下図のように、半径$R$の円に内接する四角形 ABCD において、

$$\angle BAC = \angle BDC = x$$
$$\angle ABD = \angle ACD = y$$
$$\angle CAD = \angle CBD = z$$
$$\angle ACB = \angle ADB = w$$

と角度を設定すると、

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = 4R^2 \cdot [\sin x \cdot \sin y + \sin w \cdot \sin z]$$
$$= 2R^2 \cdot [\cos(x - y) + \cos(w - z)]$$
$$AC \cdot BD = 4R^2 \cdot \sin(x + w) \cdot \sin(x + z) = 2R^2 \cdot [\cos(x - y) + \cos(w - z)]$$

となることを証明せよ。




（3） 円に内接する四角形の４辺の長さが $BC = a,\ \mathrm{CD} = b,\ \mathrm{DA} = c, \mathrm{AB} = d$ で与えられるとき、この四角形の面積は、$u = [a + b + c + d]/2$ とおくと、

$$\frac{1}{4} \cdot \sqrt{(u - a) \cdot (u - b) \cdot (u - c) \cdot (u - d)}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(-a + b + c + d) \cdot (a - b + c + d) \cdot (a + b - c + d) \cdot (a + b + c - d)}$$

で与えられることを示せ。また、内接する四角形 ABCD の対角線の交点を P とすると、以下の関係式が成り立つことを証明せよ。

$$PA = \sqrt{\frac{ac + bd}{(ab + cd) \cdot (bc + da)}} \cdot cd$$
$$PB = \sqrt{\frac{ac + bd}{(ab + cd) \cdot (bc + da)}} \cdot da$$
$$PC = \sqrt{\frac{ac + bd}{(ab + cd) \cdot (bc + da)}} \cdot ab$$
$$PD = \sqrt{\frac{ac + bd}{(ab + cd) \cdot (bc + da)}} \cdot bc$$

（４） 任意の四角形 ABCD において、

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$$

が成立すること、および等号が成立するのは四角形 ABCD が円に内接する場合に限ること（**Ptolemy の定理**の逆）を証明せよ。

（５） 正五角形の一辺の長さを対角線の長さで割った値が黄金比 $\lambda$ に一致することを **Ptolemy の定理**を用いて証明せよ。

（６） 正七角形の一辺の長さを $a$ 、２種類の対角線の長さのうち短い方の長さを $b$ 、長い方の長さを $c$ とおくと、

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

という関係式が成り立つことを **Ptolemy の定理**を用いて証明せよ。

（６）円に内接する正三角形ＡＢＣがある。弧ＡＢ上に１点Ｐをとるとき、

ＰＡ＋ＰＢ＝ＰＣ

が成り立つことを **Ptolemy の定理**を用いて証明せよ。

（７）円に内接する正五角形ＡＢＣＤＥがある。弧ＡＢ上に１点Ｐをとるとき、

ＰＡ＋ＰＤ＋ＰＢ＝ＰＥ＋ＰＣ

が成り立つことを **Ptolemy の定理**を用いて証明せよ。

（４－５） ｘｙ平面上に２つの円

$$C_0:\quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad\qquad C_1:\quad (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

をとり、$C_2$ をx軸と $C_0$、$C_1$ に接する円とする。さらに２以上の任意の自然数Nに対して、$C_{N+1}$ をx軸と $C_{N-1}$、$C_N$ に接する円で $C_{N-2}$ とは異なるものとする。$C_N$ の半径を $r_N$ 、$C_N$ と x 軸の接点を $(x_N, 0)$ として、

$$q_N = \frac{1}{\sqrt{2r_N}}; \quad p_N = q_N \cdot x_N$$

とおく。＜東京大・改＞

（１） 数列 $\{p_N\}$ および $\{q_N\}$ はともに **Fibonacci 数列**であることを示せ。

（２） 任意の自然数 N に対して、数列 $\{x_N\}$ を二項間漸化式で表現すれば、以下のように記述できることを示せ。

$$x_{N+1} = \frac{1}{1 + x_N}; \quad x_1 = 1$$

（３） 極限値 $\lim_{N \to \infty} x_N$ が黄金比 $\lambda = (\sqrt{5} - 1)/2$ に一致することを証明せよ。

５． 高さ$10\sqrt{2}$、底面の円の半径が５の直円錐が水平な机の上においてある。この直円錐の頂点をＡとし、Ａと底面の円の中心を結ぶ軸上に点Ｏをとり、ＡＯ＝$4\sqrt{2}$とする。点Ｏを通り底面に平行な平面でこの直円錐を切った切り口は点Ｏを中心とする円になるが、これを円Ｏとする。いま円Ｏの周上を図のように８等分し、各点を順にＢ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈ，Ｉと名付ける。母線ＡＦの中点をＪとする。いま２点Ｂ，Ｄを通り、底面との交線が円Ｏの直径ＢＦと垂直になる平面$\alpha$で円錐を切断したとき、円錐の側面上に出来る切り口の図形を$\Gamma$とする。各母線ＡＣ，ＡＤ，ＡＥと図形$\Gamma$との交点（接点）をそれぞれＫ，Ｌ，Ｍとする。また直円錐の内部に存在し、しかもこの直円錐の側面と平面$\alpha$の双方に接する２つの球のうち、小さい方の球の中心と半径をそれぞれ$S_1$，$r_1$、大きい方の球の中心と半径をそれぞれ$S_2$，$r_2$とする。以下小さい方の球を球$S_1$、大きい方の球を球$S_2$と呼ぶことにする。球$S_1$、球$S_2$と平面$\alpha$の接点をそれぞれ$F_1$，$F_2$とする。以下の各設問に答えよ。
<S&Ｊ塾作成問題>

（１） ＢＪの長さを求めよ。

（２） ＡK，ＡＬ，AMそれぞれの長さを求めよ。

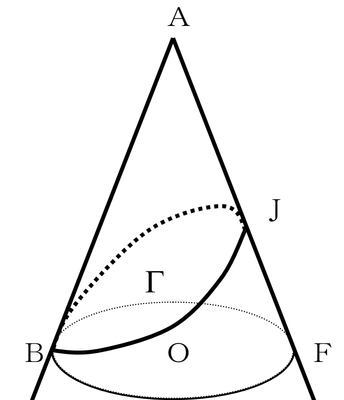
（３） $r_1$および$r_2$の値を求めよ。

（４） $BF_2$，$F_2F_1$，$F_1J$それぞれの長さを求めよ。

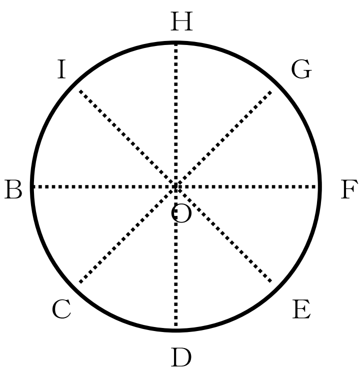
（５） 図形$\Gamma$上の任意の点Ｐに対して、$PF_1$と$PF_2$の長さの和は点Ｐの位置によらず一定であることを幾何学的に証明し（高校生であれば解析的にも証明できるが、あくまで幾何学的に証明すること）、その一定値を求めよ。

（６） 点Ｂからこの直円錐上を一周して点Ｂに戻る「紐」をかけるとき、その最短距離を求めよ。またそのような「紐」が円錐の表面上に作る図形は（図形$\Gamma$に一致せず）いかなる平面上にものらないことを証明せよ。

（７） （６）において「紐」がつくる最短経路上の全ての点が平面$\alpha$の上側にあることを証明せよ。




ＡＯを対称軸とする直円錐




円Ｏの８等分点

ヒント：（２）（７）を解く際は、Ｏを原点、底面の円Ｏの直径ＢＦをｘ軸、直円錐の軸ＡＯをｙ軸として、直円錐を△ＡＢＦを含む平面（ｘｙ平面）で切断したときの断面上への正射影をもとに、各直線の式を計算してみよ。

**（解説）**ソクラテス、アリストテレスと並ぶギリシャの３大偉人の１人プラトンの門人メネクムス（BC375～325）は、かのアレキサンダー大王に「幾何学に王道はなし」と述べたそうであるが、その大きな功績として円錐曲線の発見がある。直円錐を平面で切った切り口が切断面の傾きによって楕円（円は楕円の特別な場合）か放物線か双曲線のいずれかになることを発見した。のちにアポロニウスの円で有名なアポロニウス（BC260～200）は著作「円錐曲線論」に述べているように、直円錐を平面で切った切り口の円錐曲線上の点P（ｘ，ｙ）の間に、それが楕円か放物線か双曲線かによって、$y^2 < cx, y^2 = cx, y^2 > cx$（ｃは一定）の関係があることを見つけた。楕円、放物線、双曲線を表す英語**Ellipse, Parabola, Hyperbola**は、それぞれ不足する、一致する、超過するというギリシャ語から名付けられたものである。彼はまた**楕円の性質：「２定点（焦点と呼ぶ）からの距離の和が一定の軌跡」**および**双曲線の性質：「２定点（焦点と呼ぶ）からの距離の差が一定の軌跡」**を発見した。（５）でいう幾何学的証明はまさにアポロニウスが行ったものである。但しアポロニウスは放物線の焦点や楕円・放物線・双曲線の全てを内包する**円錐曲線（二次曲線）の統一的性質**である**「一定点F（焦点）にいたる距離と一定直線ｄ（準線）に至る距離との比ｅ（離心率）が一定の軌跡」**という事実は発見できなかった。これは後にパップス（ＡＤ330 頃）によって発見された。（聖文社：笹部貞市郎著「問題解法幾何学辞典」より適宜抜粋）

６．　以下の設問に答えよ。

（１）　回転体に関する **Pappus-Guldin の定理**

「閉曲線で囲まれた面積Ｓの図形“A”を直線軸$m$のまわりに回転させたときにできる回転体の体積Ｖは、図形“A”の重心Ｇと直線軸$m$の距離をｈとすると、　$V = S \times 2\pi \times h$　で与えられる。」

を積分法によって証明せよ。

（２）　平面Ｐの上に等辺の長さが１であるような直角二等辺三角形がある。平面Ｐ上の直線でこの直角二等辺三角形と頂点または一辺のみを共有するものを軸として、その三角形を回転させたときにできる立体の体積の最大値と最小値を求めよ。（ヒント：（１）の **Pappus-Guldin の定理**を用いよ。）＜東京大・改＞

７．　立体幾何学における**Cavalieriの公理**：

> 「同一平面上におかれた高さの等しい２つの立体をこの平面に平行などんな平面で切断しても２つの切り口の図形の面積比がｍ：ｎのときは、この２つの立体の体積比もｍ：ｎに等しい」

を積分法によって証明せよ。

またこの公理と初等幾何の手法のみを用いて、次の２つの事実を証明せよ。

（１）　半径Ｒの球の体積は、$4\pi R^3/3$で与えられる。

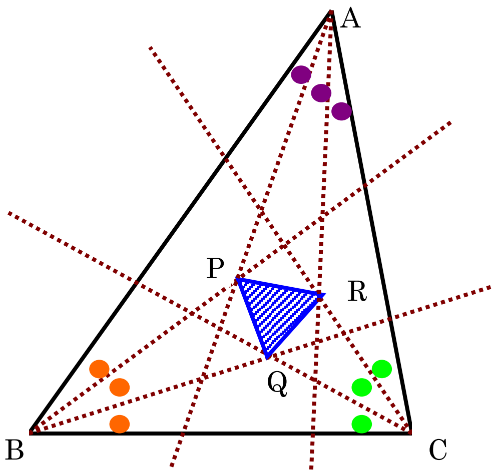
（２）　両底面になる円の面積がＡ，Ｂで高さがｈの球台の体積は、次式で与えられる。

$$(A+B)h/2+\pi h^3/6$$

８．　三角形の各辺の両端における内角の３等分線のうち、この辺に近いもの同士の交点は、１つの正三角形を作ることを、

$$PQ = QR = RP = 8 \cdot \sin(\frac{A}{3}) \cdot \sin(\frac{B}{3}) \cdot \sin(\frac{C}{3})$$

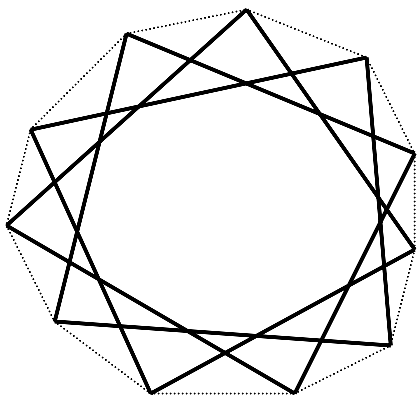
で与えられることを示すことによって、証明せよ。（**Morley の定理**）




９．　凸Ｎ角形“A”で各頂点をＭ－１個飛ばしで結んでできる多角形“B”を考える。このとき、次の事実が成り立つことを証明せよ。

（１）　多角形“B”の頂点が凸Ｎ角形“A”の全ての頂点を含むための必要十分条件は、自然数ＮとＭが互いに素である。

（２）　（１）のとき、多角形“B”の頂点の中で凸Ｎ角形“A”の頂点と一致するものだけを考える。これらの頂点の多角形“B”における頂角（内角）の総和は、$2(N-2M)\cdot\angle R$ で与えられる。



１１角形の２点飛ばし：N=11、M=3 の例

１０． 一辺の長さ１の正三角形ＡＢＣを考える。辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢ上にそれぞれ点Ｐ，Ｑ，Ｒをとり、ＢＰ＝ＣＱ＝ＡＲ＝$x$とする。但し、$0 < x < 1/2$とする。ＣＲとＡＰの交点をＤ、ＡＰとＢＱの交点をＥ、ＢＱとＣＲの交点をＦとする。

（１） AP の長さを、$x$を用いた式で表せ。

（２） AD および DR の長さを、$x$を用いた式で表せ。

（３） △ＤＥＦの面積が正三角形ＡＢＣの面積の半分になるように、$x$の値を定めよ。

１１． ｘｙ平面上において

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a > b > 0)$$

で与えられる楕円の１つの焦点Ｆを通り直交する２直線がこの楕円と交わる点をそれぞれ$P_1, P_2; Q_1, Q_2$とする。このとき、長さの和$P_1P_2+Q_1Q_2$の最大値と最小値を求めよ。

１２． 媒質１（媒質内の光速$c_1$）から媒質２（媒質内の光速$c_2$）へ入射する光に対し、入射角を$\alpha$、屈折角を$\beta$とおくと、

$$\text{光の屈折率：}\quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c_1}{c_2}$$

となることを、**Fermat の最小原理**（最短時間則）を用いて微分法で導け。

１３． 以下の設問に答えよ。

（１） 曲線$y=f(x)\ \ (a \le x \le b)$がｘ軸のまわりに回転してできる回転体の表面積をＳとすると、

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

で与えられることを、証明せよ。

（２） サイクロイドの弧 $x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)\ (0 \le \theta \le 2\pi, a > 0)$が、$x$軸のまわりに回転してできる立体の体積と表面積を求めよ。

１４． 平面上の領域

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$$

に含まれる三角形および四角形の面積の最大値を、$a,b$を用いて表せ。また、そのときの形状を示せ。（ヒント：楕円は１次変換で円に移ることを用いよ。）

１５． 任意の正の実数$x>0$に対して、以下に定義される有理函数列$f_n(x)$を考える。

$$\begin{cases} f_1(x)=x \\ f_k(x)=f_{k-1}\left(\dfrac{1}{x+3-(-1)^k}\right) & (k=2,3,\cdots) \end{cases}$$

（１） 任意の自然数ｋに対して、

$$f_k(x)=\frac{a_k x+b_k}{c_k x+d_k}$$

と表現できることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。また２次正方行列$A_k$を

$$A_k=\begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix}$$

とおけば、$A_k$は以下の漸化式を満たすことを証明せよ。

$$A_1=E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\quad A_k=A_{k-1}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3-(-1)^k \end{bmatrix}\quad (k=2,3,\cdots)$$

（２） ２次正方行列$B,C$を

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

とおくと、２次正方行列$A_k$ $(k=1,2,3,\cdots)$は次式で与えられることを示せ。

$$\begin{cases} A_{2k}=A_1\cdot B^{k-1}\cdot C \\ A_{2k-1}=A_1\cdot B^{k-1} \end{cases}$$

（３） ２次正方行列$B$の固有値、固有ベクトルを求め、$B^N$を計算せよ。

（４） $\lim_{N\to\infty} f_N(x)$は、$x$の値に関係なく一定値に収束することを示しその値を求めよ。

＜S＆Ｊ塾作成問題＞

１６． $m$次の代数方程式$f(x)=0$が$k$ $(k\le m)$個の重解$\alpha$を持つための必要十分条件は、

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=\cdots\cdots=f^{(k-1)}(\alpha)=0;\quad f^{(k)}(\alpha)\neq 0$$

であることを以下の手順で証明せよ。

（１） 必要性の証明： $f(x)=(x-\alpha)^k g(x)$ と書けることを利用せよ。

（２） 十分性の証明： $f(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j (x-\alpha)^j$ とおいて、係数$b_j$を求めよ。

１７．　ギリシャ語で「周」という意味の$\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\zeta$(perimetros)の頭文字$\pi$によって円周率（円周を円の直径で割った値）は表されている。現在における円周率算出は計算機工学の分野でコンピュータの演算速度及び演算性能を見る上での指標に意味があるようになっているが（１兆桁まで算出されている）、コンピュータが発明される以前の時代までは、円周率$\pi = 3.1415926535\cdots$という数そのものの探求に主眼が置かれ、数学とくに解析学の発展に大きな貢献をした。

1766 年に Lambert が「$\pi$が無理数（分子と分母が互いに素な自然数である既約分数で表せない実数）である」ことを、また 1882 年に Lindemann が「$\pi$が超越数（$f(\pi)=0$となるような整数係数の代数多項式が存在しない）である」ことを証明したことで、$\pi$に対する数学的関心は一段落するにいたった。

古代ギリシャの大数学者 Archimedes は、円周の長さが、円に内接する正多角形と外接する正多角形の周の長さの間にあることを利用して、正６角形を起点に正多角形の辺の数を２倍、また２倍としていき、正 96 角形まで求めることで円周率が

$$3\frac{10}{71}(\cong 3.1408) < \pi < 3\frac{1}{7}(\cong 3.1429)$$

の範囲にあることを求めた。この Archimedes の手法に関して以下の設問に答えよ。

＜中学生用問題＞

（１）　半径$R$の円に内接する正$N$角形の一辺の長さを$A_N$、正$N$角形の２倍の辺数を持つ正$2N$角形の一辺の長さを$A_{2N}$とするとき、$A_{2N}$を$A_N$と$R$を用いて表すと、以下の式が得られることを初等幾何の方法で証明せよ。

$$A_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\sqrt{2R^2 + A_N \cdot R} - \sqrt{2R^2 - A_N \cdot R}\right]$$

（２）　半径$R$の円に内接する正$N$角形の一辺の長さを$A_N$、半径$R$の円に外接する正$N$角形の一辺の長さを$B_N$とするとき、$B_N$を$A_N$と$R$を用いて表すと、以下の式が得られることを初等幾何の方法で証明せよ。

$$B_N = \frac{2A_N \cdot R}{\sqrt{4R^2 - {A_N}^2}}$$

（３）　$N = 3,4,5,6,8,10,12,16$における$A_N$および$B_N$の値をそれぞれ求めよ。

（４）　円周率が$3.05$より大きく$3.25$より小さいことを証明せよ。

１８．　本問では Archimedes の手法を、三角比を用いて簡潔に表現しよう。直径１の円に内接および外接する正$N$角形の周の長さをそれぞれ$A_N$および$B_N$とおく。

＜高校生用問題＞

（１）　三角比の図形的性質より、次式が成り立つことを示せ。

$$A_N = N\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \ ; \quad B_N = N\tan\left(\frac{\pi}{N}\right)$$

また、$\lim_{N\to\infty} A_N = \lim_{N\to\infty} B_N = \pi$ を証明せよ。

（２）　倍角・半角公式を用いて、以下の各漸化式が成り立つことを示せ。

$$B_{2N} = \frac{2A_N \cdot B_N}{A_N + B_N} \ ; \quad A_{2N} = \sqrt{A_N \cdot B_{2N}}$$

（３）　正 6，12，24 角形それぞれについて次の値が得られることを確認せよ。

$$A_6 = 3,\ \ B_6 = 2\sqrt{3},\ \ A_{12} = 3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right),\ \ B_{12} = 12\left(2-\sqrt{3}\right),$$
$$A_{24} = 6\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}},\ \ B_{24} = 24\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\right)$$

（４）　数列$\{d_N\}$

$$d_0 = \frac{2}{A_4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad ; \quad d_N = \frac{A_{2^{N+1}}}{A_{2^{N+2}}} \quad (N = 1,2,\cdots)$$

の一般項は、

$$d_N = \cos\left(\frac{\pi}{2^{N+2}}\right) \quad (N = 0,1,2,\cdots)$$

で与えられること、および数列$\{d_N\}$が漸化式

$$d_{N+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot d_N} \quad (N = 0,1,2,\cdots)$$

を満たすことを、加法定理および倍角・半角公式を用いて証明せよ。

（５）　（４）の数列$\{d_N\}$を用いると、以下の **Viète の無限乗積公式**が得られることを証明せよ。

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{N\to\infty}\prod_{k=0}^{N}\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ \cdots\cdots$$

１９．　等間隔$2h$の平行線で覆われた平面上に長さ$2t$ $(h > t)$の針を無作為に落とすとき、その針が平行線の１つと交わる確率は、以下の式で与えられることを、積分法を用いて証明せよ。（本問は **Buffon の針問題**として有名であり、**Monte-Carlo 法**的に多数回の試行実験で円周率の近似値を算出する方法として知られている。）

$$\Pr = \frac{2t}{\pi \cdot h}$$

２０．　平均値の定理および Taylor の定理に関する以下の設問に答えよ。

（１）　$a \le x \le b$ の範囲で $f(x)$ が微分可能であり、かつ $f(a) = f(b) = 0$ であれば、$f'(x) = 0$ をみたす $x$ の値が区間 $a \le x \le b$ に少なくとも１つは存在することを証明せよ（Rolle の定理と呼ばれている）。

（２）　$a \le x \le b$ の範囲で $f(x)$ が微分可能であれば、

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となるような $x$ が区間 $a \le x \le b$ に少なくとも１つは存在し、$b = a + h$ および $c = a + \theta \cdot h \quad (0 < \theta < 1)$ とおけば、

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a + \theta \cdot h)$$

と書けることを証明せよ（平均値の定理と呼ばれている）。

（３）　$a \le x \le b$ の範囲で $f(x)$ の第 $(n+1)$ 次導関数 $f^{(n+1)}(x)$ までが存在するならば、$0 < \theta < 1$ なる適当な $\theta$ をとるとき、

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots\cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\{a + \theta \cdot (b-a)\}$$

と書けることを証明せよ（Taylor の定理と呼ばれている）。

（４）　任意の正の実数 $a$ に対して、次式が成立することを証明せよ。（ヒント：$n, m$ を自然数として、$n > m > 2a$ とせよ。）

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

（５）　（３）の最後の項は剰余項と呼ばれている。特に

$$\lim_{n \to \infty} R_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\{a + \theta \cdot (b-a)\} = 0$$

の場合、$a \le x \le b$ の範囲で $f(x)$ は

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(x) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(x) + \cdots\cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots\cdots$$

と級数展開できる。これを Taylor 級数と呼ぶ。

特に $a = 0$ の場合を Maclaurin の級数と呼ぶ。

$-\infty \le x \le \infty$ の範囲で $f(x) = e^x$ が

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

と Maclaurin の級数に展開できることを、剰余項の収束に留意して証明せよ。

（６）　$e$ が無理数であることを（４）の剰余項を利用して証明せよ。

２１．　任意の実数$x$に対して、$x=\tan y$をみたす$y$は$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$において唯１つ存在する。この$y$を、$y=\tan^{-1}x=\arctan x$と表す。以下の設問に答えよ。

（１）　$\arctan x=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$を証明せよ。

（２）　$0<x<1$において、$\arctan x$は以下のように級数展開できることを証明せよ。

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot x^{2k+1} \qquad \text{（Gregory 級数）}$$

特に$x=1$とおけば、以下の Leibniz 級数を得る。

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

但し、この級数は収束緩慢で、円周率$\pi$の計算には不適当である。

（３）　Machin の公式を証明せよ。

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

この Machin の公式を、Gregory 級数を用いて級数に展開すると、

$$\pi=16\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\cdots\cdots\right)-4\cdot\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\cdots\cdots\right)$$

となり、これは急速に収束する。1837 年に Shanks はこの式を用いて円周率$\pi$の値を小数 707 位まで計算した（527 桁以降の誤算が後に判明）。

２２．　円周率$\pi$が無理数であることは、1766 年に Lambert が証明した。ここでは、1949 年に Ivan Niven が示した証明法に従って、円周率の無理数性を示そう。

いま、円周率$\pi$が有理数$b/a$（$a,b$は自然数）に等しいと仮定する。

$$f(x)=\frac{1}{n!}\cdot x^n\cdot(b-ax)^n$$

$$J_n=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx$$

とおく。$n$は自然数である。

（１）　$n$を十分大きくとれば、$0<J_n<1$とできることを証明せよ。

（２）　$J_n=-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\left[f^{(2k)}(0)+f^{(2k)}(\pi)\right]$　であることを証明せよ。

（３）　（２）より、任意の自然数$n$に対して$J_n$が整数であることを証明せよ。

以上より（１）と（３）は互いに矛盾するので、円周率$\pi$が無理数であることが証明された。

２３． 自然数$n$に対して、

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

とおく。このとき以下の設問に答えよ。

（１） $S_n$は以下の漸化式を満たすことを証明せよ。

$$\begin{cases} S_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot S_{n-2} \quad (n \geq 2) \\ S_0 = \dfrac{\pi}{2} \;; \quad S_1 = 1 \end{cases}$$

この漸化式を展開すると、次式が得られることも確認せよ。

$$S_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$S_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

（２） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} = 1$を証明し、以下の Wallis の公式を導け。

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \;; \quad \frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{(2n)^2} \right\}$$

（３） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} = 1$ および $S_{2n} \cdot S_{2n+1} = \dfrac{\pi}{4n+2}$ の関係を用いて、

$$\sqrt{\pi} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{\sqrt{n} \cdot (2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n} \cdot {}_{2n}C_n}$$

が成り立つことを証明せよ。

（４） $x = \cos t$ および $x = \cot t$ の変数変換により次式を導け。

$$S_{2n+1} = \int_0^1 (1-x^2)^n dx \;; \quad S_{2n-2} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

（５） 不等式 $1 - x^2 < e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ を、微分法を用いて証明せよ。

（６） 定積分 $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ は、$x = \sqrt{n} \cdot t$ の変数変換によって $J = \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} dx$ となることを確認せよ。また（５）の不等式を用いて、$\sqrt{n} \cdot S_{2n+1} < J < \sqrt{n} \cdot S_{2n-2}$ が成り立つことを証明せよ。

（７） （３）および（６）の結果を用いて、$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

２４．　１次元酔歩（Random Walk）に関して以下の設問に答えよ。

（１）　二項分布 $B(n, p)$ の平均と分散が次式で与えられることを証明せよ。

$$\mu = n \cdot p \ ; \qquad \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$$

数直線上の動点 P は、時刻 $t=0$ に原点を出発して１秒ごとにそれまでの履歴とは独立に、正の方向か負の方向に $1/2$ ずつの確率で１だけ移動する。これを **1 次元酔歩（Random Walk）** とよぶ。これについて以下の設問に答えよ。但し、$n$ は０および自然数とする。

（２）　時刻 $t=n$ における点 P の位置 $x$ $(-n \le x \le n)$ の確率分布、平均、分散は次式で与えられることを証明せよ。

$$p_n(x) = \frac{{}_nC_k}{2^n} \quad ,\text{where } k = \frac{n-x}{2}$$

$$\mu_n(x) = 0 \ ; \ \ {\sigma_n}^2(x) = n$$

（３）　時刻 $t = n \ge 1$ における点 P と原点の距離 $D_n$ の平方の期待値 $E({D_n}^2)$ は、$n$ に等しいことを証明せよ。

（４）　時刻 $t = n \ge 1$ における点 P と原点の距離 $D_n$ の期待値を $E(D_n)$ とおくと、次式が成り立つことを証明せよ。

$$E(D_{2n}) = E(D_{2n-1}) = \frac{n}{2^{2n-2}} \cdot {}_{2n-1}C_{n-1}$$

（５）　Wallis の公式を用いて、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{E(D_n)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cong 0.8$　を示せ。（この式は、例えば１秒間に１歩（約 50cm）移動するとして、１時間には酔っ払いが泥酔しながらさまよったとき、せいぜい 25(m)しか平均的には動けないことを示している。）

（６）　漸化式 $p_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}\{p_n(x-1) + p_n(x+1)\}$ が成り立つことを用いて、

$$E(D_n) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(0)$$　が成り立つことを導け。

（７）　時刻 $t = n$ 秒以下で、１度も原点に戻ることのない確率（非再帰確率） $q_n$ は、次式で与えられることを証明せよ。

$$q_{2n} = q_{2n-1} = \frac{{}_{2n-1}C_{n-1}}{2^{2n-1}}$$

また $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ 、すなわち酔歩は時間がたてば原点に戻ることを確認せよ。

２５．　$n$ 人の生徒と $n$ 室の個室があり、各生徒にも個室にも $1,2,\cdots,n$ の番号がつけてある。$n$ 人の生徒を $n$ 室の個室に一人ずつ（全ての個室に一人が入るように）無作為に入れるとき、各個室の番号とその個室に入る生徒の番号が異なるような入れ方を $F_n$ 通り、その様な入れ方になる確率を $p_n$ とするとき、以下の設問に答えよ。（本問題は **Montmort の問題**として知られている。）

（１）　$F_n$ は次の漸化式を満たすことを証明せよ。

$$F_{n+2}=(n+1)\cdot\left(F_{n+1}+F_n\right)\ ;\ F_1=0\ ;\ F_2=1$$

（２）　$n\geq 2$ において、$p_n=\sum_{m=2}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}$ で与えられることを証明せよ。

（３）　$f(x)=e^x$ の **Maclaurin 級数**への展開を利用して、$\lim_{n\to\infty}p_n$ の値を求めよ。

２６．　水平上の２固定点に鎖をぶら下げるときに得られる曲線（ネックレスを思い浮かべるとよい）は一見すると放物線のように見えるが、実は、**懸垂線**（**Catenary Curve**：ラテン語で「鎖」を意味する Catena という単語に由来する）になることがわかる。この懸垂線は数学的には**双曲線関数**で表現できる。以下の設問に答えよ。

（１）　双曲線 $H:x^2-y^2=1\ \ (x>0)$ 上の任意の点 $P(x,y)$ は、実数 $t$ を用いて、

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\cosh t\ ;\ y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\sinh t$$

と媒介変数表示できることを示せ。cosh と sinh はそれぞれ**ハイパボリック・コサイン**および**ハイパボリック・サイン**という名のついた双曲線関数である。

（２）　双曲線関数 $x=\cosh t$ には逆関数が存在し、

$$t=\cosh^{-1}x=\log_e\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

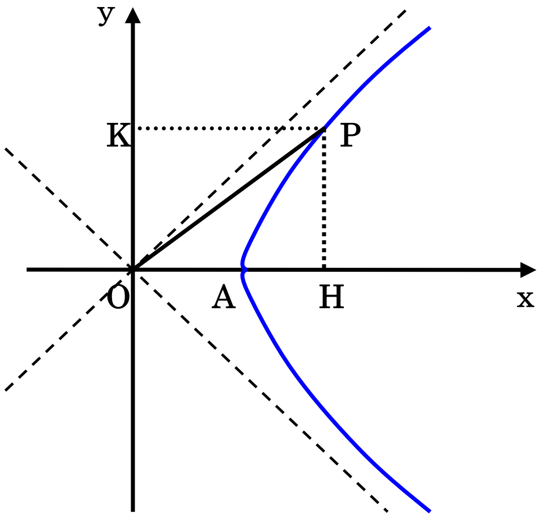
で与えられることを証明せよ。

同様に、双曲線関数 $y=\sinh t$ にも逆関数が存在し、

$$t=\sinh^{-1}y=\log_e\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

で与えられることを証明せよ。

（３）　下図のように、双曲線 $H:x^2-y^2=1\ \ (x>0)$ 上の第一象限部分にある点Ｐ$(\cosh t,\sinh t)$ から x 軸および y 軸に下ろした垂線の足をそれぞれＨおよびＫとする。またこの双曲線の頂点をＡ$(1,0)$ とする。双曲線の弧ＡＰ、直線ＯＰおよび x 軸で囲まれた部分の面積を $S_1$、直角三角形ＯＰＫの面積を $S_2$ とする。




このとき、以下の関係式が成り立つことを証明せよ。

$$S_1 = \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\log_e\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \frac{1}{2}\log_e\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\left[\log_e\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) + y\sqrt{y^2 + 1}\right]$$

また、双曲線 $H : x^2 - y^2 = 1 \ (x > 0)$ 上の第一象限部分は、$x = \sqrt{y^2 + 1}$ と

表せ、$S_1 + S_2$ の面積は面積の積分定義より $\int_0^y \sqrt{y^2 + 1} \cdot dy$ と書けるので、

$$\int_0^y \sqrt{y^2 + 1} \cdot dy = \frac{1}{2}\left[\log_e\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) + y\sqrt{y^2 + 1}\right]$$

が得られる。従って以下の不定積分公式が得られる。

$$\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx = \frac{1}{2}\left[\log_e\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + x\sqrt{x^2 + 1}\right] + C$$

（４） 放物線 $x^2 = 4py$ の原点Ｏから点Ｐ $\left(u, u^2/4p\right)$（但し $u > 0$）の部分の弧長を、（３）の不定積分を用いて求めよ。

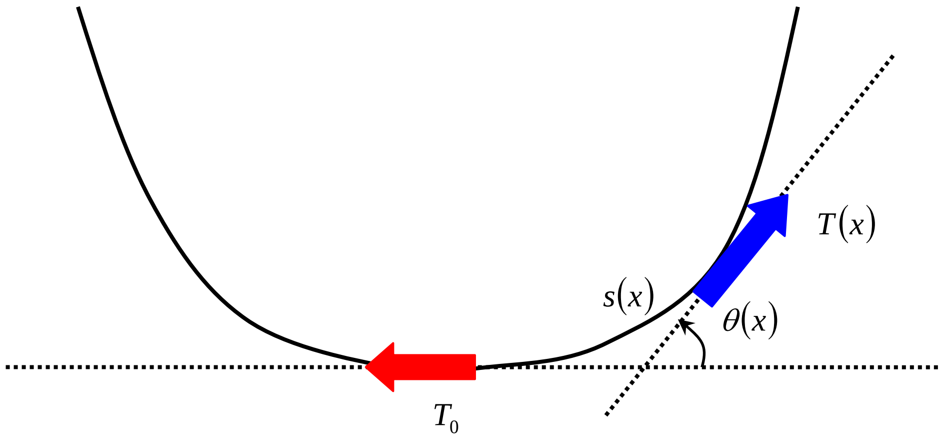
（５） 極方程式 $r = \theta \ (\theta \geq 0)$ で表される渦巻き線の、$0 \leq \theta \leq \pi$ の部分の長さを、（３）の不定積分を用いて求めよ。＜京大・改＞

（６） 任意の実数 $t > 0$ に対して、以下の条件を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

条件：「$x \geq 0$ でつねに $f(x) \geq 0$ を満たす曲線 $y = f(x)$ 上に２点
Ａ $(0, f(0))$，Ｂ $(t, f(t))$ をとるとき、曲線上の弧ＡＢの長さが、
曲線 $y = f(x)$、ｘ軸、ｙ軸、$x = t$ の囲む面積に等しい。」

02, December, 2006

２７． それでは、懸垂線がなぜ双曲線関数になるかを、Newton 力学的に導いてみよう。水平な２点からつるされた線密度$\sigma$の鎖の最下点を原点とし、鎖の対称軸をｙ軸、原点を通りｙ軸に垂直な直線をｘ軸とおき、求める曲線の式を$y=f(x)$とおく。$f(0)=0$となる。以下、対称性より$x\geq 0$で考える。




鎖の原点（最下点）で働く張力（水平成分のみ）を$T_0$とおく。また鎖上の任意の点$(x, f(x))$で接線方向に働く張力成分を$T(x)$、その点での接線の傾きを$f'(x)=\tan\theta(x)$とする。また原点から点$(x, f(x))$までの鎖の弧長を$s(x)$とする。力の釣り合いから

$$T_0 = T(x)\cdot\cos\theta(x)$$
$$g\sigma\cdot s(x) = T(x)\cdot\sin\theta(x)$$

の関係式が得られるが、「長さ」分の１の Dimension（次元）をもつ

カテナリー係数： $\eta = \dfrac{g\sigma}{T_0}$

なる量を導入すると、鎖の釣り合い方程式が以下のように得られる。

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$$
$$\tan\theta(x) = f'(x) = \eta\cdot s(x)$$

この微分方程式の解法について以下の設問に答えよ。

（１） $\eta = \dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dx}$ を導け。

（２） 不定積分 $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$ を求めよ。

（３） （１）、（２）より、$\dfrac{df(x)}{dx} = \tan\theta(x) = \sinh(\eta\cdot x)$を導け。

（４）　境界条件 $f(0)=0$ と（３）より、関数 $f(x)$ が次式で与えられることを示せ。

$$f(x)=\frac{1}{\eta}\cdot\{\cosh(\eta\cdot x)-1\}$$

以上より、**「懸垂線が双曲線関数で表されること」**が証明された。

**（解説）懸垂線**のもう１つの性質に、「長さが一定のひもの２点を固定して、その曲線を回転して面を作るとき、最も側面積の小さい曲線」が**懸垂線**になることが知られている。側面積極小曲面であるこの懸垂線の回転体は Catenoid と呼ばれている。この証明には、大学初年級で学ぶ**「変分法」**の知識が必要となる。

２８．　放物線 $x^2=4py$ が $x$ 軸上を滑らずに転がるとき、焦点Ｆの軌跡の方程式を求め、この軌跡が懸垂線であることを証明せよ。

（円、楕円、放物線、双曲線に分類される２次曲線が定直線上を転がるときに得られる軌跡を総称して**ドローネ曲線**という。円が直線を転がるとき、円上の固定点が描く軌跡が**サイクロイド**になることは有名であるが、放物線が直線上を転がるとき焦点の描く軌跡が**懸垂線**になることも覚えておいてほしい。）

２９．　$n,m\in N$ とするとき、**Euler** のベータ関数 $F(n,m)=\int_0^1 x^{n-1}\cdot(1-x)^{m-1}dx$　が、

$$F(n,m)=F(m,n)=\frac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(n+m-1)!}$$

をみたすことを証明せよ。

３０．　以下の定積分に関する設問に答えよ。

（１）　$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$　を証明せよ。

（２）　$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\cdot dx=\frac{\pi^2}{4}$　を証明せよ。

３１．　有名不等式に関する設問に答えよ。

（１）　区間 $(a,b)$ において $f''(x)>0$、すなわち関数 $y=f(x)$ のグラフが区間 $(a,b)$ において下に凸であるとき、$a<x_i<b\ (i=1,2,\cdots,n)$ ならば、

$$\alpha_i>0,\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i=1$$

を満たす $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ に対して、不等式

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

が成り立ち、等号は全ての $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$　が等しいときに限ることを、平均値の定理を用いて証明せよ。（**Jensen の定理**）

（２）　$f(x)=-\log x \quad (x>0)$ は $x>0$ で下に凸であることを確認せよ。

また、この関数に **Jensen の定理**を適用すれば、不等式

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i \quad ,\text{where } x_i>0,\ \alpha_i>0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$$

が得られることを証明せよ。

（３）　（２）より、**相加・相乗平均の不等式**

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots\cdots x_n}$$

を導き、等号は全ての $x_i \ (i=1,2,\cdots,n)$ が等しいときに限ることを確認せよ。

（４）　$x_i, y_i$ を任意の実数とするとき、**Cauchy-Schwarz の不等式**

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}\right)$$

が成立し、等号は　$x_1:y_1=x_2:y_2=\cdots=x_n:y_n$ のときに限ることを証明せよ。

（５）　実数 $a,b,c,x,y,z$ が、条件

$$(a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=1 \quad \text{および} \quad x^2+y^2+z^2=1$$

を満足するとき、$J=ax+by+cz$ の最大値と最小値、およびそれぞれの場合の実数 $a,b,c,x,y,z$ の値を、**Cauchy-Schwarz の不等式**を用いて求めよ。

３２．　項数が $n$ 個で、各項が実数の２つの有限数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ がある。以下の各設問に答えよ。

（１）　それぞれの数列を並べ替えて（置換操作）、新しい数列 $\{a'_n\}$ および $\{b'_n\}$ を作る。

$P=\sum_{i=1}^{n} a'_i b'_i$ を最大にするには、数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ をどう置換すればよいか。

（２）　数列 $\{a_n\}$ を並べ替えて（置換操作）、新しい数列 $\{a''_n\}$ を作る。

$Q=a''_1\cdot a''_2+a''_2\cdot a''_3+\cdots+a''_n\cdot a''_1$ を最大にするには、数列 $\{a_n\}$ をどのように置換すればよいか。

３３．　O を原点とする座標平面上に、y 軸上の点 $P(0,p)$ と、直線 $m: y=(\tan\theta)x$ が与えられている。ここで、$p>1,\ 0<\theta<\pi/2$ とする。いま、傾きが $\alpha$ の直線 $l$ を対称軸とする対称移動を行うと、原点 O は直線 $y=1$ 上の第１象限の点 Q に移り、y 軸上の点 $P(0,p)$ は直線 $m$ 上の点 R に移った。＜東京大＞

（１）　$\tan\theta$ を、$a$ と $p$ で表せ。

（２）　次の条件を満たす点 $P$ が存在することを示し、そのときの　$p$ の値を求めよ。

条件：「どのような $\theta \ (0<\theta<\pi/2)$ に対しても、原点を通り直線 $l$ に

垂直な直線は $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ となる。」

**（解説）** 古代ギリシャより「与えられた２点を結ぶ直線を引くための定規と、与えられた点を中心とし与えられた２点間の長さを半径とする円を描くためのコンパスのみを有限回用いて目的の図形を描く」という作図問題の伝統の下で、三大難問の１つに挙げられ、1837 年に**Wantzel**によって作図不能であることが代数的に証明された「**任意の角の３等分問題**」が、**折り紙では可能である**ことを本問題は証明している。折り紙は定規とコンパスによる作図と違い、紙面上の２点を異なる直線上に同時にのせるように折ることができることがミソといえる。各自、実際に折り紙を折って確認してもらいたい。

３４．　ｘｙ平面上に長さ２の線分 AB を直径とする半円を D とする。半円 D の内部（周を含まない）の１点を P とする。点 A と点 P を通る直線と半円 D の円弧の部分との交点を Q とし、点 B と点 P を通る直線と半円 D の円弧の部分との交点を R とする。五角形 ARPQB の面積を S とおく。＜東京大＞

（１）　∠APB を一定に保ったまま点 P が半円 D の内部を動くとき、S のとりうる値の範囲を求めよ。

（２）　点 P が半円 D の内部を自由に動くとき、S のとりうる値の範囲を求めよ。

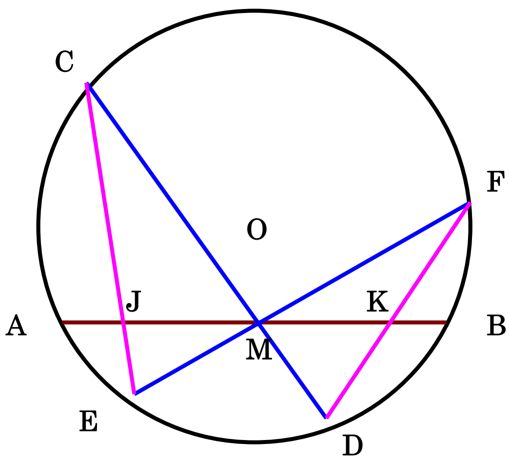
３５．　以下の各場合における確率を、積分法により求めよ。

（１）　ある長さの線分を３分したとき、各部を３辺とする三角形を作りうる確率

（２）　長さ $a$ の線分 AB 上に１点 P を無作為にとり、次に線分 PB 上に１点 Q を無作為にとったとき、$PQ \le b \quad (a>b>0)$ となる確率

３６．　下図のように、円 O の中心 O を通らない弦 AB の中点 M を通る、円 O の二つの異なる弦 CD および EF をひく。弦 CE と弦 AB の交点および弦 DF と弦 AB の交点をそれぞれ J および K とする。このとき JM=KM が成り立つことを証明せよ。

（この定理は、**蝶々定理**もしくは **Butterfly 定理**として知られている。）



３７．　一辺の長さが１の立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨがある。対角線ＡＧに点Ｐを$AP = k \cdot AG$となるようにとる。$0 \le k \le 1$の範囲で点Ｐを動かすとき、点Ｐを通り対角線ＡＧに垂直な平面でこの立方体を切断したときに出来る図形の面積を$S(k)$とする。$S(k)$をｋの関数として求め、ｙ＝$S(k)$のグラフを図示せよ。

３８．　図のように中心$O_{AC}$、半径$R$の半円$O_{AC}$の中に、互いに点Bで外接する中心$O_{BC}$、半径$(1-m)R$の小半円$O_{BC}$と、中心$O_{AB}$、半径$mR$の大半円$O_{AB}$を内接させる。但し、$0 < m \le 1/2$とする。次に、半円$O_{AC}$に内接し半円$O_{BC}$と半円$O_{AB}$に外接する円$O_1$を作る。さらに、半円$O_{AC}$に内接し半円$O_{AB}$と円$O_1$に外接する円$O_2$を作る。以下、次々と任意の自然数Nに対し、半円$O_{AC}$に内接し半円$O_{AB}$と円$O_N$に外接する円$O_{N+1}$を作る。円$O_N$の直径を$d_N$、円$O_N$の中心と直線ACとの距離を$y_N$とするとき、$y_N$を$d_N$で割った$y_N$と$d_N$の比の値を$r_N$とすると、以下の関係式が成立し、$r_N$は、初項１、公差１の等差数列になることを証明せよ。

$$d_N = \frac{2m(1-m)}{m^2 N^2 + (1-m)} \cdot R$$

$$r_N = \frac{y_N}{d_N} = N$$

（この問題は**Pappus**の発見したもので、**「靴屋のナイフ問題」**と呼ばれている。）