30. Aug. 2005

解いてみよう！

数学演習問題　（中学生で解ける有名定理や大学入試問題）

1.　（数と式、数列）

現在 A 君は B 君の前方 L[km]の地点 P_0 にいる。A 君は徒歩で時速 X[km/hr]で、B 君は自転車で時速 Y[km/hr]で同時に時刻 T_0 に出発した。但し、Y>X とする。この問題を以下のように考えるとする。

「B 君が、現在 A 君がいる地点 P_0 に到達する時刻を T_1、そのとき A 君が到達する地点を P_1 とする。次に B 君が地点 P_1 に到達する時刻を T_2、そのとき A 君が到達する地点を P_2 とする。この操作を繰り返し、自然数 n に対し、B 君が地点 P_{n-1} に到達する時刻を T_n、そのとき A 君が到達する地点を P_n とする。」

以下の問いに答えよ。

（1）　T_3 を求めよ。

（2）　$T_n - T_{n-1}$（但し n は１以上の整数とする）を、n を用いて表せ。

（3）　n を無限大にした場合、T_n はある一定値に収束することを示し、その値を求めよ。

（4）　（3）で求めた値は、何を意味するか。

（5）　この問題は「アキレスと亀のパラドックス」として有名であるが、パラドックスすなわち「一見矛盾するようで実は正しい」という所以を、数学的に説明せよ。

＜S&J 塾作成問題＞

2.　（一次関数）

三本の直線

$l:\ kx - y + (2-k) = 0$

$m:\ x - ky + (2k-1) = 0$

$n:\ x + y + 1 = 0$

がある。次の問いに答えよ。

（1）　この三直線が三角形を作らない条件を求めよ。

（2）　（1）でないとき、この三直線が囲む三角形の面積 S を、k を用いて表せ。

（3）　（2）で求めた面積 S が３のとき、k の値を求めよ。

＜早稲田大改＞

３．　（二次関数と一次関数）

二次関数 $y = mx^2$ $(m \neq 0)$ 上に、直線 $x + y = 1$ に関して対称な、相異なる二点が存在するような、mの取るべき値の範囲を求めよ。またそのときの二点の座標を、mを用いて表せ。

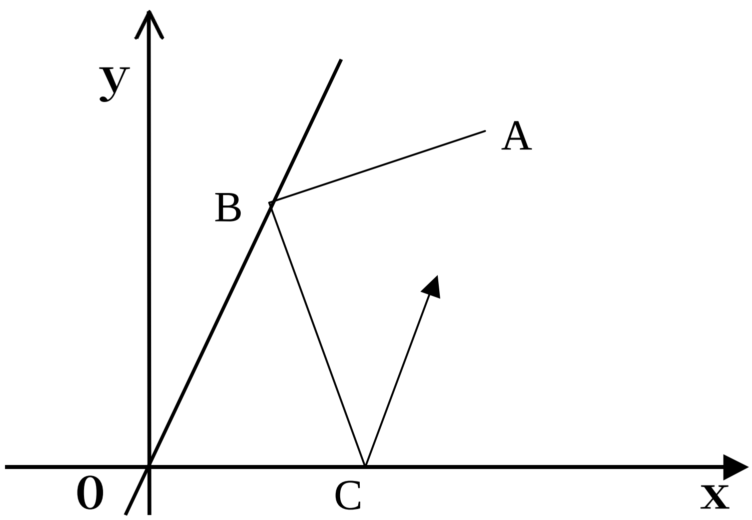
＜S&J 塾作成問題＞

４．　（一次関数）

座標平面上の直線$l : y = 2x$について以下の設問に答えよ。

（１）　点 P（p，q）の直線$l : y = 2x$に関する対称点 Q の座標をp、qを用いて表せ。

（２）　点 A（５，５）から出発して直進する点が、点 B において直線$l : y = 2x$で反射し、次にx軸で反射して再び A に戻るようにしたい。B の座標をどのように取ればよいか。但し、反射の際、入射角と反射角は等しいものとする。



＜愛知教育大＞

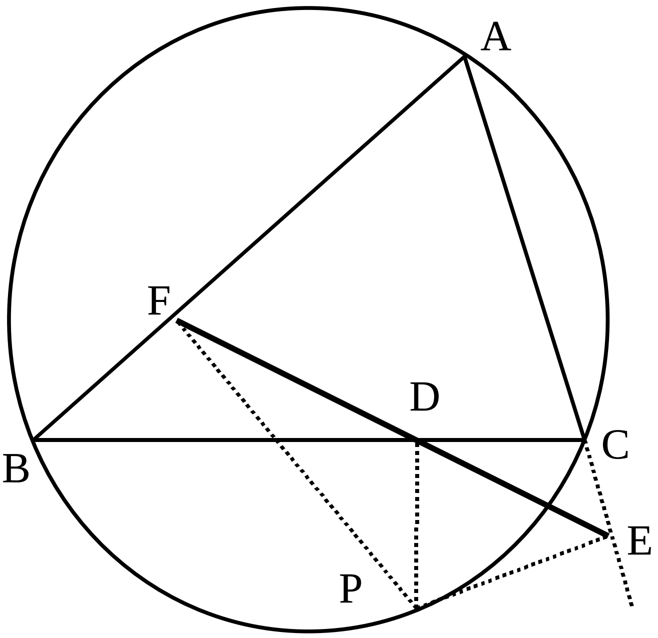
５．　（二次方程式）

bおよびcを実数、かつbは０でないとする。二次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ の２解 a, b が $a + b = a^2 + b^2 = a^3 + b^3$　をみたすとき、（b，c）の値を求めよ。

＜S&J 塾作成問題＞

６．　（平面幾何）
半径１の円に内接する正五角形の一辺の長さと面積を求めよ。
＜頻出問題＞

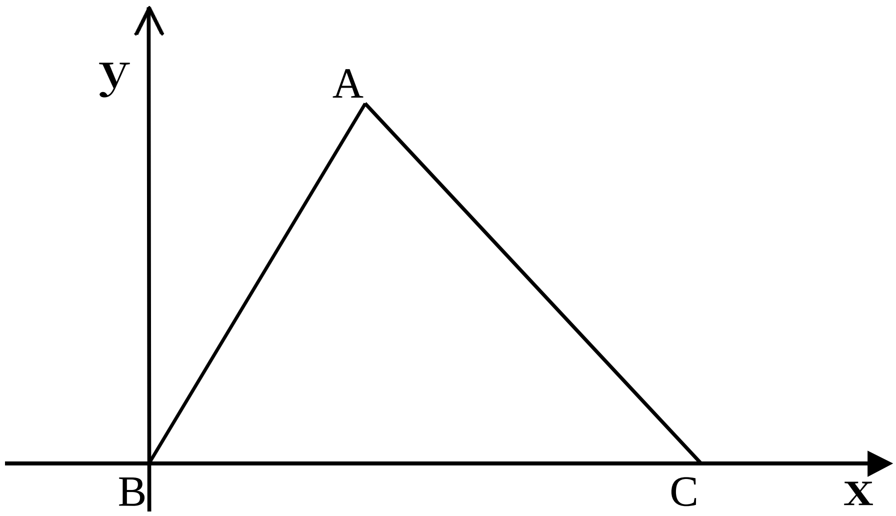
７．　（平面幾何）
三角形 ABC **の外接円上にある任意の点** P **から３辺** BC、CA、AB **又はその延長に下ろした垂線の足をそれぞれ** D、E、F **とすれば、３点** D、E、F **は一直線上にあることを示せ。（この直線を三角形** ABC **の点** P **に対する<u>シムソン線</u>**（R.Simson, 1687~1768）**という。）**
＜有名定理＞



８．　（平面幾何と座標）
三角形ＡＢＣにおいて、辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡをそれぞれ２：１に内分する点をA_1，B_1，C_1とし、また線分A_1B_1，B_1C_1，C_1A_1をそれぞれ２：１に内分する点をA_2，B_2，C_2とする。このとき、三角形$A_2B_2C_2$は三角形ＡＢＣに相似であることを証明せよ。
＜京都大＞

９．　（平面幾何と一次関数）

下図のように点Ａ（a，b）、**点**Ｂ（0，0）、**点**Ｃ（c，0）**とおいても、三角形としての一般性は失われない。各設問に答えよ。**



（１）　この三角形の重心、垂心、外心の座標をそれぞれ求めよ。

（２）　（１）より、三角形において、重心、垂心、外心は一直線上に並ぶことを証明せよ。

（３）　$a=5$、$b=8$、$c=11$のとき、この三角形の内心の座標および内接円の半径を求めよ。

＜S&J **塾作成問題**＞

１０．　（立体幾何）

すべての面が合同な四面体ABCD**がある。**AB＝**７**、BC＝**８**、CA＝**９のとき、この四面体の体積を求めよ。**

＜東京大前期改＞

１１．　（場合の数）

５人が３軒のホテルに泊まる方法は何通りあるか。但し、人もホテルも区別し、どのホテルにも少なくとも一人は泊まるものとする。

＜頻出問題＞

30. Aug. 2005

１２．　（ピタゴラス数、整数、数と式）

以下の式を満たす３つの整数の組（*ａ*，*ｂ*，*ｃ*）をピタゴラス数と呼ぶ。

$$a^2+b^2=c^2$$

$$a>0, b>0, c>0$$

（１）$t=\dfrac{b+c}{a}$とおいて、*ｂ*，*ｃ*を*ａ*，*ｔ*を用いて表せ。

（２）（１）の結果を踏まえ、*ｔ*を２から１０までの整数として、ピタゴラス数を作れ。

（３）*ａ*，*ｂ*，*ｃ*が互いに素であるとき、この３数の積*ａｂｃ*は６０の倍数であることを証明せよ。

＜武蔵高改＞

１３．　（確率）

ある地方では、朝、山に雲がかかると雨が降るという言い伝えがある。そこで実際にこの地方で１００日間について記録をとると、

- 雲がかかって雨が降った日が２５日
- 雲がかかって雨が降らなかった日が２５日
- 雲がかからなくて雨が降らなかった日が４５日
- 雲がかからないのに雨が降った日が５日

であった。以上の記録を元に、この言い伝えの正しさを吟味せよ。

＜桃山学院大＞

１４．　（平面幾何、作図）

三点 A、B、C が一直線上にこの順に並んでいる。この直線上以外の点 P をとり、∠APB＝３０°、∠BPC＝４５°となるように作図（コンパスと直線を引くためのみに定規を使用）せよ。

＜S&J 塾作成問題＞

１５．　（立体幾何）

フラーレン C_{60} やサッカーボールは、正五角形を正六角形（フラーレンの場合、ベンゼン環構造が正六角形に相当する）が取り囲む構成をした準正多面体である。正五角形と正六角形がそれぞれ何枚あるか、考察せよ。

＜頻出問題＞

１６．　（平面幾何）

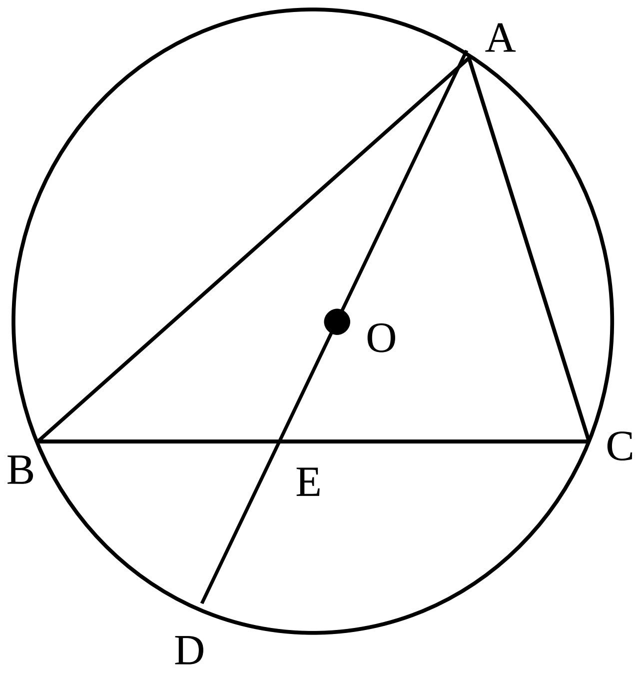
図のように三角形 ABC は円 O に内接している。また、AD は円 O の直径である。AD と BC の交点を E とする。∠AEB＝１２０°、BE＝５cm、EC＝８cm、AE＝１０cmとするとき、次の問いに答えよ。

（１） 三角形 AEC の面積を求めよ。

（２） 円 O の半径を求めよ。

（３） 直線 AC と直線 BD との交点を P とおくとき、三角形 ABP の面積を求めよ。

＜早稲田大系属早稲田シンガポール高改＞



１７．　（二次方程式）

ある水槽に水を入れるために A、B、C の３本の管がある。A 管の直径は C 管の２倍である。C 管を使って満水にするには B 管を使うよりも６時間多くかかる。また B、C 両管を併せて用いると、A 管だけを使うよりも１時間多くかかるという。A、B、C を同時に使用すると、何時間で満水するか。但し、管中の流れの速さはすべて変わらないとする。

＜頻出問題＞

１８．　（平面幾何、作図）

平行な二直線*m*、*n*とその間に点 A がある。直線*n*上に点 B、直線*m*上に点 C をとり、三角形 ABC が正三角形となるように作図せよ。

＜頻出問題＞

１９．　（連立一次方程式の従属性）

１００人の集団を考える。このうち７５人がコンピュータ、８０人が携帯電話、６０人が車を持っているという。コンピュータと携帯電話の両方を所有している人の数を N 人とする。またコンピュータ、携帯電話、車のすべてを所有している人の数を M 人とする。

（１） N の最小値、最大値はいくらか。

（２） M の最小値、最大値はいくらか。

＜頻出問題＞

２０．　（格子点問題：ディオファントス不定方程式の整数解）

座標平面上に点A（*１４*，*０*)、点 B（*０*，*２２*)、点 C（－*１４*，*０*)、点 D（*０*，－*２２*）がある。次の問いに答えよ。

（１） 線分 AB 上（両端を含める）で、（x，y）両座標とも整数である点（格子点と呼ぶ）の個数を求めよ。

（２） ひし形 ABCD の内部（辺上は含めない）で、（x，y）両座標とも整数である点（格子点と呼ぶ）の個数を求めよ。

＜頻出問題＞

２１．　（二次式の平方完成）

直角に交差する航空路を航空機 A と航空機 B が同一高度で地点 O に向け、それぞれ巡航対地速度 V_1 及び V_2 で水平飛行している。現在地点での A 機及び B 機の地点 O からの距離はそれぞれ r_1 及び r_2 である。また航空航法上規定される航空機相互間の水平距離の許容値を D とする。周辺に他の航空機はないものとし、風や気流に伴う対気速度と対地速度の差及び速度の不確定性の影響はないものと仮定する。A 機と B 機が航空管制による指示を受けることなくこのまま安全に水平飛行できるための必要十分条件は、

$$D^2\ (V_1^2+V_2^2)\ <\ (r_1V_2-r_2V_1)^2$$

で与えられることを証明せよ。

＜S&J 塾作成問題＞

２２．　（三平方の定理、立体幾何）

半径１の全く同じ３つのガラス球がある。

（１） この３つのガラス球を机上で完全に覆うことが出来る最も小さい半球の蓋の半径を計算せよ。

（２） またこのとき、蓋とガラス球の隙間に出来る空間に小さな別のガラス球を挿入したいとする。そのような小ガラス球の半径の最大値を求めよ。

＜頻出問題＞

30. Aug. 2005

２３．　（三平方の定理、立体幾何）

半径１の球に内接する正八面体において、次の各値を算出せよ。

（１）　一辺の長さ

（２）　表面積

（３）　体積

（４）　相対する二面間の距離

（５）　この正八面体に内接する球の半径

＜頻出問題＞

２４．　（三平方の定理、正多角形、平面幾何）

（１）　半径 R の円に内接する正ｎ角形の一辺の長さをA_n、正ｎ角形の２倍の辺数を持つ正２ｎ角形の一辺の長さをA_{2n}とするとき、A_{2n}をA_nと R を用いて表せ。

（２）　半径 R の円に内接する正ｎ角形の一辺の長さをA_n、半径 R の円に外接する正ｎ角形の一辺の長さを B_nとするとき、B_nをA_nと R を用いて表せ。

（３）　円周率が３．０５より大きく３．２５より小さいことを証明せよ。

＜東京大改＞

２５．　（立体幾何）

半径Ｒの球の表面積が、その球に外接する直円柱の側面積と同じく、$4\pi R^2$になることを、（高校で履修する積分学の知識を用いずに、中学で学ぶ初等幾何学の知識だけを用いて）数学的に導出せよ。

＜有名定理＞

２６．　（立体幾何）

立体幾何学におけるカバリエリの公理 「同一平面上におかれた２つの立体を、この平面に平行などんな平面で切断しても２つの切り口の図形の面積が常に等しいときは、この２つの立体の体積は等しい」

を用いて、（高校で履修する積分学の知識を用いずに、中学で学ぶ初等幾何学の知識だけを用いて）次の２つの事実をそれぞれ証明せよ。

（１）　半径Ｒの球の体積は、$4\pi R^3／3$で与えられる。

（２）　両底面になる円の面積がＡ，Ｂで高さがｈの球台の体積は、次式で与えられる。

$$(A+B)h／2+\pi h^3／6$$

＜有名定理＞

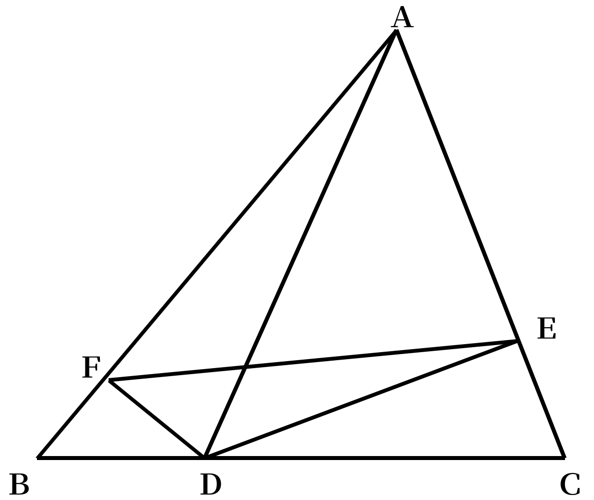
２７．　（平面幾何、背理法による論証）

鋭角三角形ＡＢＣの辺ＢＣ上に点Ｄをとって、この点から辺ＣＡ，ＡＢに下ろした垂線の足をそれぞれＥ，Ｆとするとき、次の各条件が成立するようにしたい。このような点Ｄは存在するか、また存在する場合はその個数はいくつになるか、理由を述べて答えよ。

（１）　ＡＤがＥＦにより２等分される。

（２）　ＥＦがＡＤにより２等分される。

＜九州大＞



２８．　（一次関数、整数）

図１

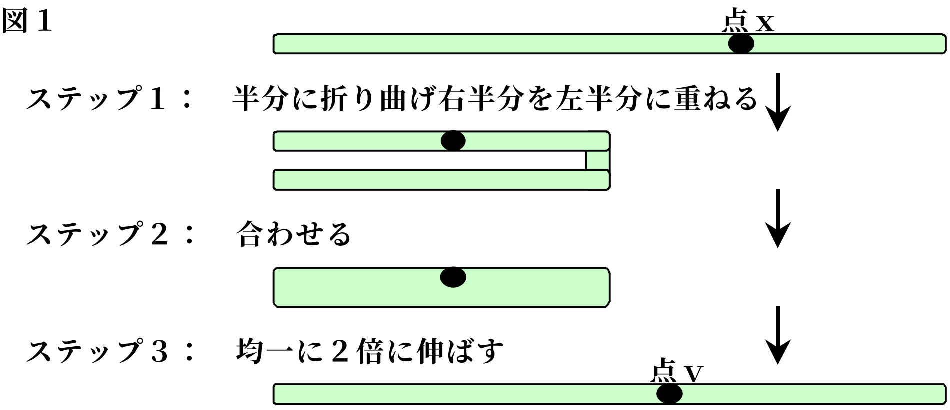
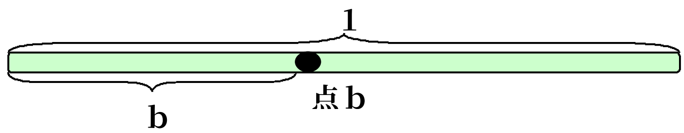


図２



30. Aug. 2005

長さが１の細長いパイ生地をこねることを考える。図１のステップ１～３の手順を、パイ生地を一回「こねる」作業とする。またパイ生地の上の点で、左端からの距離がｂである点を図２のように簡単に「点ｂ」で表す。パイ生地を１回「こねる」と図１のように点ｘは点ｙに移る。例えば、点０．７は点０．６に移る。（本問題は海城高の入試問題で、以下の設問（１）及び（２）が実際に出題されているが、設問（３）以降は当塾で追加的に作題したものである。）

（設問）

（１）　１回こねる作業により点ｘは点０．２に移った。このようなｘを全て求めよ。

（２）　２回こねる作業により点ｘははじめてもとの位置ｘに戻った。考えられるｘの値を全て求めよ。

（３）　２回こねる作業により点ｘ（ｘは０でないとする）は点 $x/2$ に移った。このようなｘの値を全て求めよ。

（４）　３回こねる作業により点ｘははじめてもとの位置ｘに戻った。考えられるｘの値を全て求めよ。

（５）　点ｘは１回こねると点 $f_1(x)$ 、２回こねると点 $f_2(x)$ というように、任意の自然数ｎに対してｎ回こねると点 $f_n(x)$ に移るとする。このとき、定義域 $0 \le x \le 1$ において、 $0 \le k \le 2^{n-1}-1$ の範囲に存在する 2^{n-1} 個の整数から選ばれた任意の整数ｋに対して、$f_n(x)$ は次式で与えられることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n x - 2k & \left(\dfrac{2k}{2^n} \le x \le \dfrac{2k+1}{2^n}\right) \\ -2^n x + 2(k+1) & \left(\dfrac{2k+1}{2^n} \le x \le \dfrac{2(k+1)}{2^n}\right) \end{cases}$$

（６）　点ｘをｎ回こねたとき、もとの位置ｘに戻るような点ｘは、2^n 個存在することを示し、そのようなｘの値を全て求めよ。

（７）　任意の自然数Ｎに対して、$x = 1/N$ で与えられる点は有限回のこねる作業を繰り返して点ｘに戻ることが出来るか否か、理由をつけて答えよ。

（８）　点ｘをｎ回こねたとき、はじめてもとの位置ｘに戻るような点ｘの個数を $h(n)$ とする。$h(4)$，$h(5)$，$h(6)$，$h(7)$，$h(8)$ の各値を求めよ。

（９）　（８）から予想できる仮説を１つ述べ、その仮説が正しいか否かを数学的に論ぜよ。

＜海城高改、S&J 塾作成問題＞