30. Nov. 2005

高校１年
「二次関数のグラフと最大値・最小値決定問題」　演習問題

基礎レベル

１．以下の各関数のグラフを書け。（但し、頂点、ｘ軸やｙ軸との交点などの主要座標は必ず明記すること。）
（１）$y=x^2+x+1$　（２）$y=8-6x-x^2$　（３）$y=-9x^2-4x+8$
（４）$y=x^2-2|x|-3$　（５）$y=x^2-|4x-3|$　（６）$y=|x^2-1|+x$

２．以下の各関数の（　）内の変域における最大値と最小値を求めよ。
（１）$y=x^2+2x+3\quad(-2\le x\le 2)$　（２）$y=1-x^2\quad(-1\le x\le 2)$
（３）$y=|x|(x-1)\quad(-1\le x\le 3)$　（４）$y=(x^2-1)^2-4(x^2-1)\quad(-1\le x\le 3)$
（５）$y=x^4-2x^2+4\quad(-1\le x\le 3)$　（６）$y=x|x-3|-x+2\quad(-1\le x\le 4)$
（７）$y=|x^2-2x-1|\quad(0\le x\le 5/2)$
（８）$y=x^2(x-6)^2+4x(x-6)+3\quad(0\le x\le 4)$

３．次の各条件を満たす放物線$y=ax^2+bx+c$の各係数ａ，ｂ，ｃをそれぞれ決定せよ。
（１）３点 (-3,18)，(5,-30)，(3,0)を通る。
（２）２点 (0,-1)，(3,2)を通り、頂点が直線$y=3x-3$上にある。
（３）２点 (-1,4)，(2,-8) を通り、頂点が直線$2x-4y+27=0$上にある。
（４）点 (1,0) を通り、最小値－２をもち、かつ直線$y=-x$に接する。
（５）２点 (0,2)，(1,-1) を通り、ｘ軸を切り取る線分の長さが$2\sqrt{2}$である。
（６）２点 (0,4)，(2,-2) を通り、ｘ軸を切り取る線分の長さが最小である。
（７）頂点の座標が (2,4) であり、直線$y=x+4$がｙ軸及びこの放物線と交わる点を、順次Ｐ，Ｑ，Ｒとするとき、ＰＱ：ＱＲ＝１：３である。

４．２本の対角線の和が１０cm のひし形の面積の最大値および周の長さの最小値を求めよ。

５．底辺の長さがａ、高さがｈの鋭角三角形に内接する長方形のうち面積が最大なものの形状（縦と横の長さ）を決定せよ。

６．正三角形ＡＢＥの点Ａと反対側に長方形ＢＣＤＥを付け足して五角形ＡＢＣＤＥを作る。この五角形の周囲の長さが３３cm のとき、この五角形の面積を最大にするように、五角形の形状を決定せよ。

７．一周４００ｍの競技用トラックは半円２つと中央の直線コースが作る長方形を合体させた形態を持つ。中央の直線コースが作る長方形の面積を最大にするには、直線コースの長さをいくらにすればよいか。

８．平面上の相異なる N 個の点からの距離の２乗の和が最小になるようなこの平面上の点はどのような点か、座標を用いて決定し、図形的特徴を述べよ。

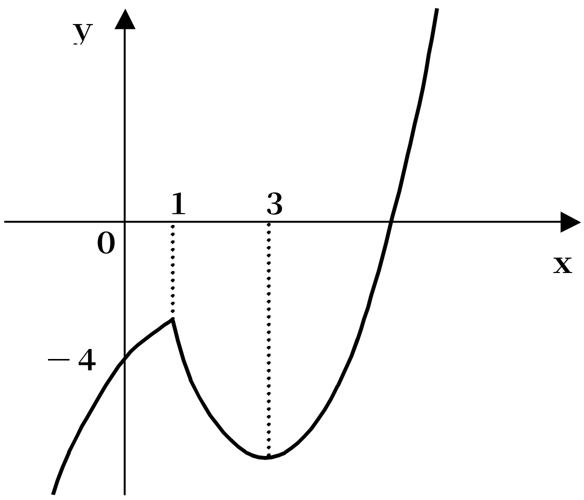
９．点（２，－３）を通り放物線$y=x^2/2+3$に接する直線の方程式と接点の座標を求めよ。

１０．　二次関数$y=a(x^2+x+1)-x$は最大値１をもつという。係数ａの値を決定せよ。

１１．　二次関数$y=3x^2/4-3x+4$の定義域$a \leq x \leq b$ $(0<a<b)$における値域が$a \leq y \leq b$であるとき、ａ，ｂの値を求めよ。

１２．　二次関数がｘ＝１において最小値－４をとり、またこの関数のグラフのｘ軸との交点のｘ座標をそれぞれx_1，x_2とおくとき、$3x_1x_2(x_1+x_2)+2=0$が成り立つという。この二次関数を決定せよ。

１３．　下の図は関数$y=|x-a|(x-b)-2x+c$のグラフを書いたものである。ａ，ｂ，ｃの値を求めよ。



１４．　実数(ｘ，ｙ)が$x^2+(y-1)^2=4$をみたすとき、$P=2x^2+y$の最小値と、そのときの(ｘ，ｙ)の値を求めよ。

１５．　以下の設問に答えよ。

（１）　実数(ｘ，ｙ)が$2x-3y=10$をみたすとき、$P=x^2+y^2$の最小値と、そのときの(ｘ，ｙ)の値を求めよ。

（２）　整数(ｘ，ｙ)が$2x-3y=10$をみたすとき、$Q=x^2+y^2$の最小値と、そのときの(ｘ，ｙ)の値を求めよ。

１６．　ＡＢ＝１０のとき、ＡＢを直径とする円周上に点Ｐをとる。以下の設問に答えよ。

（１）　$2AP^2+3BP$の最大値を求めよ。

（２）　２ＡＰ＋３ＢＰの最大値を求めよ。

１７．　空間における２点Ａ$(2,-1,1)$，Ｐ$(x,y,x+y+1)$とする。ｘ，ｙが任意の実数値をとるとき、線分ＡＰの長さが最小になるときのｘ，ｙの値とＡＱの最小値を求めよ。

１８． $1 \le x \le 6$ における関数 $f(x) = ax^2 - 4ax + b$ の最大値が２０、最小値が－４であるという。このときａ，ｂの値を求めよ。

１９． ２つの放物線 $C_1 : y = 3x^2 - (a-1)x + a + 1$ と $C_2 : y = 2x^2 + (2b-1)x - 2b$ の頂点が一致するとき、ａ，ｂの値と頂点の座標を求めよ。

２０． 二次関数 $y = 4x^2 + 2ax - 1$ のグラフをｘ軸方向に－１，ｙ軸方向に２だけ平行移動したグラフが点(２，１)を通るという。このときａの値を定めよ。

２１． 二次関数 $y = 3x^2 + 5x - 2$ のグラフをｘ軸方向にａ，ｙ軸方向にｂだけ平行移動すると、点（１，４）を通るようになるという。$b = g(a)$ とするとき、$g(a)$ を求め、$b = g(a)$ のグラフをかけ。

２２． 二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は最小値１をもち、直線ｙ＝ｍｘ＋ｎと２点 (-1,2), (2,5) で交わるという。この条件を満たす二次関数と直線の方程式を決定せよ。

２３． $f(x)$，$g(x)$ はともにｘの二次関数で、次の４つの条件をみたしている。

①：$f(x)$ は $x = a \ (a < 0)$ で最大値３をとる。

②：$g(x)$ の最小値は－１である。

③：$g(a) = 11$ である。

④：$-2 \le x \le 5$ において、$f(x) + g(x)$ は $x = b$ で最大値２８をとり、$x = 2$ で最小値－４をとる。

このとき、ａ，ｂの値および関数 $f(x)$，$g(x)$ の式をそれぞれ決定せよ。

２４． 点(－１，－３)を通り、放物線 $y = x^2 - 2x + 3$ と異なる２点Ａ，Ｂで交わる直線がある。以下の設問に答えよ。

（１） 直線ＡＢの傾きをｍとするとき、ｍの値の範囲を求めよ。

（２） 線分ＡＢの中点の軌跡の方程式を求め、その図形のグラフを図示せよ。

２５． ａ，ｂ，ｃを実数の定数とする。ｘ軸上の任意の点から点(２，ｂ)を頂点とする放物線 $y = ax^2 - x + c$ にひいた２本の接線がつねに直交するとき、ｂの値を決定せよ。

２６． ａを定数とするとき、$|x| + 2|y| = 2$ と $y = x^2/4 - a$ のグラフの共有点の個数を求めよ。＜お茶の水女子大＞

２７． 関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 6a + 3$ と、$g(x) = 4(x-1)$ がある。以下の設問に答えよ。

（１） 放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ が接するときのａの値を求めよ。

（２） 放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ が異なる２点Ａ，Ｂで交わり、Ａ，Ｂのｙ座標がともに正のとき、ａの値の範囲を求めよ。

（３） 放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ が異なる２点Ａ，Ｂで交わり、Ａ，Ｂのｙ座標の一方が正、他方が負になるときの、ａの値の範囲を求めよ。

２８．　直線$y=2x+6$上に点Ｐをとり、Ｐからｘ軸、ｙ軸にそれぞれ垂線ＰＱ，ＰＲをひく。原点をＯ、点Ｐのｘ座標をｔとするとき、四角形ＯＱＰＲの面積を$f(t)$で表す。
（１）$f(t)$を求め、$S=f(t)$のグラフをかけ。
（２）四角形ＯＱＰＲが正方形になるときの、点Ｐの座標を求めよ。

中級レベル

２９．　ある二次関数のグラフはｘ軸に接し、点(４，２)を通る。また$0 \leq x \leq 1$における最小値が 1/2 である。この二次関数を決定せよ。

３０．　関数$y=f(x)$に対して以下の各変換を施したとき得られる図形の方程式を求めよ。

	変換	$y=f(x)$
１．	ｘ軸方向にｐ，ｙ軸方向にｑだけ平行移動	
２．	ｘ軸に関しての線対称移動	
３．	ｙ軸に関しての線対称移動	
４．	原点に関しての点対称移動	
５．	点（ｒ，ｓ）に関しての点対称移動	
６．	直線ｙ＝ｘに関しての線対称移動	
７．	直線$ax+by+c=0$に関しての線対称移動	
８．	原点の回りを反時計回りで角度Θ回転	
９．	原点を中心にｋ倍に相似拡大	

３１．　放物線$y=x^2$に対して以下の各変換を施したとき得られる図形の方程式も併せて求めよ。そのとき、得られた図形の方程式が関数になるものはどれか、記号で答えよ。

	変換	$y=x^2$
1.	ｘ軸方向に-3，ｙ軸方向に-4 だけ平行移動	
2.	ｘ軸に関しての線対称移動	
3.	ｙ軸に関しての線対称移動	
4.	原点に関しての点対称移動	
5.	点(７，－２)に関しての点対称移動	
6.	直線ｙ＝ｘに関しての線対称移動	
7.	直線$-3x+2y-5=0$に関しての線対称移動	
8.	原点の回りを反時計回りで９０°回転	
9.	原点の回りを反時計回りで６０°回転	
10.	原点を中心に 1/3 倍に相似拡大	

３２．　放物線$y=-x^2$を平行移動して、別の放物線$y=x^2-x-2$との２つの交点が原点に関して対称となるようにするためには、どのように平行移動すればよいか。

３３．　放物線$C_1 : y = 2x^2$をｘ軸方向にｐ，ｙ軸方向にｑだけ平行移動すると、放物線$C_2 : y = ax^2 - 12x + b$になり、これを点(ｒ，－２)に関して対称に折り返すと（点対称移動すると）放物線$C_3 : y = cx^2 + dx - 5$となる。放物線Ｃ$_3$の頂点は、半直線$y = -3x \ (x \geq 0)$上にある。このときａ，ｂ，ｃ，ｄ，ｐ，ｑ，ｒの値を求めよ。

３４．　放物線$y = mx^2 + 3(m - 4)x - 9$はｘ軸と２点で交わることを証明せよ。また、この２点間の距離が最小となるようなｍの値を求めよ。

３５．　ａがどのような実数値を取っても、二次関数$y = x^2 - 2(a + 3)x + a^2 + 8a$は常に一定の直線に接するという。この直線の方程式を求めよ。

３６．　以下の設問に答えよ。＜S&J 塾作成問題＞

（１）　二次関数$y = x^2 - 1$上の相異なる２点で、直線ｘ＋ｙ＝０に関して対称なものが存在する。この２点の座標を求めよ。

（２）　二次関数$y = ax^2 - 1$上に直線ｘ＋ｙ＝０に関して対称な相異なる２点が存在するとき、ａの取りうる値の範囲を求めよ。またそのときの２点の座標を、ａを用いて表せ。

３７．　放物線$y = x^2 + 2x + 2$上の点Ｐと直線$y = x/2 - 1$との距離の最小値と、そのときの点Ｐの座標、および点Ｐからその直線への垂線の足Ｈの座標を求めよ。

３８．　放物線$y = x^2$上の点Ｐと点Ａ(０，ａ)との距離が最小となるように点Ｐの座標を定めよ。また点Ｐにおけるこの放物線の接線は直線ＰＡと直交することを証明せよ。

３９．　二つの放物線$C_1 : y = x^2 - 2x + 2$と$C_2 : y = -x^2 + ax + b$は、互いの交点の１つである点Ｐで接線が互いに直交しているものとする。このとき放物線Ｃ$_2$は定数ａ，ｂの値に無関係な定点Ｑを通ることを証明し、その点Ｑの座標を求めよ。

４０．　ａ＞０，ｂ＞０とするとき、平面上の点Ａ(a^2, b)，Ｂ$(a^2 + 2b, 0)$に対し、$AP : BP = 1 : \sqrt{3}$をみたす点Ｐの軌跡をＫとする。以下の設問に答えよ。

（１）　Ｋが円（アポロニウスの円と呼ばれる）になることを示し、この円の中心の座標と半径を求めよ。

（２）　円Ｋが線分ＯＢと２点で交わるための必要十分条件をａ，ｂで表し、(ａ，ｂ)平面にその領域を図示せよ。ただし、Ｏは座標の原点とする。

４１．　放物線$y = -x^2 + px + q$の頂点Ａ(x_1, y_1)と、放物線$y = x^2 + qx + r$の頂点Ｂ(x_2, y_2)が、直線$x + y = 1/2$に関して対称であるとき、以下の設問に答えよ。＜釧路公立大＞

（１）　Ａ(x_1, y_1)とＢ(x_2, y_2)の関係式を求めよ。

（２）　線分ＡＢの長さが$1/\sqrt{2}$のとき、ｐ，ｑ，ｒの値を求めよ。ただし、点Ｂは第４象限にあるとする。

（３）　（２）において、２つの放物線が異なる２点で交わるとき、２つの放物線の交点を結ぶ線分の長さを求めよ。

４２．　定義域$0 \leq x \leq 1$における二次関数$y=-x^2+2ax+a^2$の最大値Mと最小値mをそれぞれａの関数$M=g(a)$，$m=h(a)$で表し、グラフにせよ。

４３．　変域$0 \leq x \leq 1$で定義された関数$y=x|x-a|$の最大値を F(a) とするとき、F(a) を a の式で表し、グラフにせよ。

４４．　変域$t \leq x \leq t+s$における関数$y=|x^2-2ax|$　$(a>0)$の最大値を$M(t)$とするとき、以下の設問に答えよ。

（１）$s=a$のとき、$M(t)$をｔ，ａで表し、$M(t)$のグラフをかけ。

（２）ｔの値に関わらず、$M(t) \geq a^2/2$が常に成り立つとき、ｓに要求される条件を、ａを用いて表せ。

４５．　ａを正の定数とするとき、関数$y=x|x-a|$のグラフと傾きmの直線$y=mx$との共有点の個数が３個であるためのmについての条件をａの値によって場合分けせよ。＜立命館大＞

４６．　２つの関数$f(x)=|x^2+2x-3|+2x+6$と、$g(x)=2x+k$がある。$y=f(x)$のグラフと、$y=g(x)$のグラフの共有点の個数を定数ｋの値に応じて分類せよ。

４７．　ｘについての方程式$|x^2-4ax+4a^2-1|=x+k$――①について、以下の設問に答えよ。

（１）①が４つの実数解をもつとき、ｋの取り得る値の範囲をａを用いて表せ。

（２）（１）の条件の下で、①の解をｐ，ｑ，ｒ，ｓ$(p<q<r<s)$とするとき、

$$u=\frac{s-p}{r-q}$$

の取り得る値の範囲を求めよ。

４８．　実数ｘ，ｙが、$x^2+y^2-2xy-4x-4y+6=0$を満たすとき、基本対称式$x+y$，xyの最小値をそれぞれ求めよ。＜同志社大＞

４９．　実数ｘ，ｙが$x^2+y^2-2xy-x-y=0$――①を満たしｘ－ｙが整数ならば、ｘもｙも整数であることを証明せよ。また等式①を満たす格子点（ｘ，ｙ両座標ともに整数である座標平面上の点）のうちで点(100，100)に最も近いものを求めよ。＜一橋大＞

５０．　$x+y+z=1$を満たす実数ｘ，ｙ，ｚに対して、$P=x^2+y^2+z^2$の値を最小にするｘ，ｙ，ｚの値とそのときのＰの最小値、および$Q=xy+yz+zx$の値を最大にするｘ，ｙ，ｚの値とそのときのＱの最大値をそれぞれ求めよ。

５１．　実数ｘ，ｙが次の３つの不等式$x-2y+7 \geq 0, 4x-3y-12 \leq 0, x+2y-3 \geq 0$を満足するとき、$P=x^2+y^2$の最大値と最小値を求めよ。

５２．　実数ｘ，ｙが次の３つの不等式$x+2y-6\leq 0, 2x+y-3\geq 0, ax-y\leq 0$を満足するとき、$P=x^2+y^2$の最大値Ｍと最小値ｍをそれぞれａの関数で表せ。但しａは正の定数とする。

５３．　ｘ，ｙが２つの不等式$x\leq 2y, 3x^2-9x+3y+1\leq 0$を満たすとき、以下の分数式Ｐのとりうる値の最大値および最小値を求めよ。

$$P=\frac{x^2}{2x^2-2xy+y^2}$$

５４．　定点Ａ(０，ａ)を通る直線ｎと放物線$y=x^2$とが２つの異なる共有点Ｐ，Ｑをもつとき、$k=1/AP+1/AQ$は直線ｎの傾きによらず一定であるという。このとき、ａ及びｋの値を定めよ。＜関西学院大＞

５５．　放物線$y=2x^2$と点（０，ａ）を中心とする半径１の円との共有点が４個あるとき、ａのとりうる値の範囲を求めよ。またその場合、もしａが整数値であれば、４個の共有点を頂点とする四角形の面積はいくらになるか。＜昭和薬科大＞

５６．　ｘｙ平面上の点Ｐから放物線$y=x^2$へ２本の異なる接線を引き、それらの接点をＱ，Ｒとする。＜東工大＞

（１）　点Ｐが３つの不等式$y\leq x-1, y\leq -x+1, -1\leq y$を同時に満たす範囲を動くとき、線分ＱＲの中点が動く範囲を図示せよ。

（２）　三角形ＰＱＲの面積が２に等しくなる点Ｐはどのような曲線上にあるか。その方程式を求め、図示せよ。

５７．　放物線$C: y=x^2$に対し、Ｃ上にない点Ｐ、Ｃ上の２点Ｑ，Ｒについて、∠ＱＰＲ＝９０$^\circ$、線分ＰＱは点ＱでＣの接線と直交し、線分ＰＲは点ＲでＣの接線と直交しているとする。以下の設問に答えよ。＜上智大＞

（１）　点Ｑ，ＲがＣ上を動くとき、点Ｐの軌跡の方程式を求めよ。

（２）　点Ｑのｘ座標をａとし、ａ＞０とする。△ＰＱＲの面積をＳ(a)とおく。Ｓ(a)を求め、グラフに図示せよ。

（３）　（２）で点ＱがＣ上を動くとき、△ＰＱＲの面積の最小値を求めよ。

５８．　２つの放物線$y=x^2$および$y=-(x-1)^2$によって、等しい長さの線分が切り取られる直線ｎについて以下の設問に答えよ。

（１）　直線ｎは１つの定点を通る。その定点の座標を求めよ。

（２）　直線ｎが通り得る範囲を図示せよ。

５９．　放物線$y=x^2$と直線$y=x+k$との異なる２つの交点をＰ，Ｑとし、直線ＰＱ上に$PR\cdot QR=2$となる点Ｒをとる。ｋの値が変化するとき、Ｒはどのような図形を描くか、それを図示せよ。

６０．　△ＡＢＣにおいて、∠Ｂ＝３０°，∠Ｃ＝６０°，ＡＣ＝ａとする。動点Ｐ，Ｑが同時に時刻ｔ＝０に点Ａからこの三角形の辺上を、点ＰはＡ→Ｂ→Ｃの方向に、点ＱはＡ→Ｃ→Ｂの方向にそれぞれ動き始め、出会ったところで静止するものとする。点Ｐの速度を毎秒１とする。以下の各場合それぞれにおいて、△ＡＰＱの面積S(ｔ)のグラフを書き、S(ｔ)の最大値とその時のｔの値を求めよ。

（１）　点Ｑの速度が毎秒１のとき

（２）　点Ｑの速度が毎秒$\sqrt{3}$のとき

（３）　点Ｑの速度が毎秒２のとき

６１．　面積１の△ＡＢＣにおいて、辺ＡＢ上に１点Ｐをとり、Ｐを通り辺ＢＣに平行な直線と辺ＡＣの交点をＱとする。更に、線分ＰＱの中点に関してＡと対称な点をＲとする。点Ｐが辺ＡＢ上を動くとき、△ＡＢＣと△ＰＱＲの共通部分の面積Ｓの最大値を求めよ。＜京都大＞

６２．　全ての実数ｘに対して、$ax^2-2ax-a^2+3>0$が成立する定数ａの値の範囲を求めよ。

６３．　２つの関数$f(x)=-x^2+ax+a-2$と、$g(x)=x^2-(a-2)x+3$について、次の条件を満たすように、実定数ａの値の範囲をそれぞれ定めよ。

（１）どんな実数ｘの値に対しても、$f(x)<g(x)$が成り立つ。

（２）どんな実数x_1，x_2の値に対しても、$f(x_1)<g(x_2)$が成り立つ。

６４．　$0\leq x\leq 1$の範囲で、関数$f(x)=x^2+2x-2$と、$g(x)=-x^2+2x+a+1$について、次の条件を満たすように、実定数ａの値の範囲をそれぞれ定めよ。＜大阪教育大＞

（１）どんな実数ｘの値に対しても、$f(x)<g(x)$が成り立つ。

（２）ある実数ｘの値に対して、$f(x)<g(x)$が成り立つ。

（３）どんな実数x_1，x_2の値に対しても、$f(x_1)<g(x_2)$が成り立つ。

（４）ある実数x_1，x_2の値に対して、$f(x_1)<g(x_2)$が成り立つ。

６５．　全ての実数ｘに対して、不等式$x^2+ax-|x|+4>0$が成り立つように、定数ａの値の範囲を定めよ。

６６．　以下の設問に答えよ。＜信州大＞

（１）　ｋを０でない定数とする。原点と放物線$y=kx^2-3$上の点との最短距離を求めよ。

（２）　半径１の円の中心が放物線$y=kx^2-3$上を動くとき、この円が原点を中心とする半径１の円と共通点をもたないためのｋに関する条件を求めよ。

６７．　ｘｙ平面において、２点A(１，２)，B(３，５)を結ぶ線分（端点を含む）上のすべての点が、不等式$y>x^2+ax+b$で表される領域に含まれるとき、放物線$y=x^2+ax+b$の頂点が存在する範囲を図示せよ。

６８．　平面上の領域Ａ，Ｂをそれぞれ

$$A=\{(x,y)\mid x>0 \text{ and } y>0\},\qquad B=\{(x,y)\mid x\le 0 \text{ and } y>1\}$$

により定め、$D=A\cup B$とする。放物線$y=-x^2+ax+b$が領域Ｄと交わらないためのａ，ｂの条件を求め、そのような点(ａ，ｂ)の存在する範囲を図示せよ。＜津田塾大＞

６９．　２つの実数ｐ，ｑのうち最大の数を$\max(p,q)$で表す。以下の設問に答えよ。

（１）$\max(p,q)=(|p-q|+p+q)/2$で与えられることを証明せよ。

（２）$a\ge 0$とする。$f(x)=\max(x+a,-x+a+b)$; $g(x)=f(f(x))$とおくとき、$g(x)$を求めよ。

（３）$g(x)\ge -x^2$が常に成立するためのａ，ｂの条件を求め、点(ａ，ｂ)の存在する範囲を図示せよ。

７０．　$a>1$とし、４点$O(0,0)$，$P(2a,a^2)$，$Q(a,a^2)$，$R(0,1)$を頂点とする四角形ＯＰＱＲの周および内部を領域Ｄとする。行列

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}$$

の表す一次変換をｆとするとき、ｆによる領域Ｄの像は線分であることを証明せよ。また、ａが$a>1$の範囲で変化するとき、その線分の長さの最小値を求めよ。

７１．　ｔの関数$f(t)=1+2at+b(2t^2-1)$において、区間$-1\le t\le 1$のすべてのｔに対して$f(t)\ge 0$であるようなａ，ｂを座標とする点(ａ，ｂ)の存在する範囲を図示せよ。＜東京大＞

７２．　実数ｔの値によって定まる点$P(t+1,t)$と$Q(t-1,-t)$がある。＜京都大＞

（１）　ｔがすべての実数を動くとき、直線ＰＱの通過する範囲を図示せよ。

（２）　ｔが$0\le t\le 1$の範囲を動くとき、線分ＰＱが通過する領域の面積を求めよ。

７３．　ＡＰ＝１，∠Ｐ＝９０°の直角二等辺三角形ＡＰＢが、現在点Ｐが原点Ｏ、点Ａが座標$(1,0)$、点Ｂが座標$(0,-1)$の位置に静止している。いま点Ｐが放物線$y=x^2$上を、辺ＰＡがｘ軸と平行な位置を保ちながら動くとき（すなわち直角二等辺三角形ＡＰＢを、形状を維持しながら点Ｐが放物線$y=x^2$上を沿うように平行移動させるとき）、線分ＡＢ（端点を含む）の通過する領域を求め、図示せよ。

７４．　２変数関数$z=2axy+x+y+a+b\ \ (a\ge 0)$とする。いま実数ｘ，ｙが、$x^2+y^2=1$を満たしながら変化するとき、任意の正数ｃに対して$0\le z\le c$となるためのａ，ｂの条件を求め、点(ａ，ｂ)の存在する範囲を図示せよ。

７５．　ａが定数のとき、関数$y=a\cos 2\Theta+\sin\Theta,\ \ 0\le\Theta\le 180^\circ$の最大値を求めよ。

７６．　不等式$a\cos 2\Theta+b\cos\Theta<1$がすべての実数Θについて成り立つような点(ａ，ｂ)の範囲を図示せよ。＜京都大＞

７７． 以下の設問に答えよ。ただし、$0^\circ \le x \le 180^\circ, 0^\circ \le y \le 180^\circ$ とする。

（１）$a = \cos x + \cos y,\ b = \cos x \cos y$ であるとき、点(ａ，ｂ)の存在する領域を、ａｂ平面上に図示せよ。

（２）$(3\cos x - 1)(3\cos y - 1)$ の最大値、最小値を求めよ。

（３）$x + y = 90^\circ$ のとき、$b = \cos x \cos y$ を最大にするようなｘ，ｙの値を求めよ。

７８． ａ，ｂは実数で $a \ge 0$ とする。

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = a \\ \sin 3x - \cos 3y = b \end{cases}$$

を同時にみたすｘ，ｙが存在するためにはａ，ｂはどのような条件を満足すればよいか。このときの点(ａ，ｂ)の範囲を図示せよ。＜同志社大＞

７９． 以下の設問に答えよ。

（１） 放物線 $y = 2x^2$ を適当に平行移動して、ｙ軸との交点がＰ(０，ｐ)，Ｑ(０，ｑ)となるようにするには、どのように移動したらよいか。ただし $p \ne q$ とする。

（２） （１）において、ｐ，ｑが、$\log_{10}|p| + \log_{10}|q| = 0$ をみたしながら変化するとき、移動した放物線の頂点の軌跡を求めよ。

８０． ｘｙ平面上で、次の条件を満たす点（ｘ、ｙ）の範囲をＤとする。＜東京大＞

$$\log_2 x \le 2 + \log_2 y \le \log_2 x + \log_2 (4 - 2x)$$

（１） Ｄをｘｙ平面上に図示せよ。

（２） $s < 1$ のとき、$y - sx$ のＤ上での最大値 $f(s)$ を求め、関数 $t = f(s)$ のグラフをｓｔ平面上に図示せよ。

８１． ｘｙ平面上の $x^2 \le y$ で表させる領域をＤとする。Ｄに完全に含まれる１辺の長さｔの正方形で、各辺が座標軸と平行または４５°の角をなすものをすべて考える。このとき、これらの正方形の中心のｙ座標の最小値をｔの関数で表し、そのグラフを書け。＜東京大＞

８２． 放物線 $y = x^2$ 上の動点Ｐは、点Ａ $(1,1)$ と点Ｂ $(-1/2, 1/4)$ の間を動く。＜一橋大＞

（１） △ＡＰＢの面積が最大となるときの点Ｐの座標をもとめよ。

（２） **∠ＡＰＢの大きさが最大となるときの点Ｐの座標をもとめよ。**

８３． $a > 1$ に対して、次の２つの放物線を考える。＜東京大＞

$$C_1 : y = x^2 + \frac{1}{a^2} \quad ; \qquad C_2 : y = -(x - a)^2$$

（１） C_1，C_2 の両方に接するような直線がつねに２本存在することを証明せよ。

（２） （１）で定まる４つの接点が作る四角形の面積Ｓ(ａ)の最小値を求めよ。

８４． 二次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ において、閉区間 $-1 \le x \le 1$ における関数 $|f(x)|$ の最大値をＭとおくと、$M \ge 1/2$ であり、等号は $f(x) = x^2 - 1/2$ のときに限り成り立つことを証明せよ。（この命題は、チェビシェフの定理の最も簡単なバージョンである。）

８５．　ａ，ｂ，ｃは整数で、ａ＜ｂ＜ｃをみたす。放物線$y = x^2$上に３点Ａ，Ｂ，Ｃをとる。Ａ，Ｂ，Ｃのｘ座標をそれぞれａ，ｂ，ｃとする。＜一橋大＞

（１）∠ＢＡＣ＝６０$^\circ$とはならないことを示せ。

（２）ａ＝－３のとき、∠ＢＡＣ＝４５$^\circ$となる組(ｂ，ｃ)をすべて求めよ。

８６．　放物線$y = x^2$上の相異なる３つの格子点（ｘｙ両座標とも整数である点）Ａ，Ｂ，Ｃが作る三角形の面積をＳとする。以下の設問に答えよ。＜S&J 塾作成問題＞

（１）　Ｓ＝４をみたす三角形ＡＢＣは存在しないことを証明せよ。

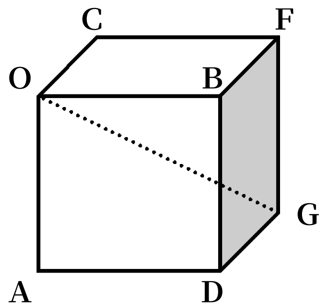
（２）　点Ａのｘ座標を１とする。Ｓ＝１５をみたす三角形ＡＢＣは何個存在するか。

（３）　三角形ＡＢＣが存在するためにはＳの値がある条件を満たす必要がある。その条件を求めよ。

８７．　放物線の一部$y = x^2$; $0 \le x \le 2$をｙ軸の周りに回転して出来る回転体型の容器に水を満たし、この中に、半径ｒの鉛の球を、それが容器につかえて止るまでゆっくり沈めた。ただし、鉛直線をｙ軸とする。もとの水面の高さから球の中心の高さを引いた差ｓをｒの関数で表し、ｒｓ平面上に図示せよ。＜東京大＞

８８．　ｘｙｚ空間において、ｘｚ平面上の$0 \le z \le 2 - x^2$で表される図形をｚ軸のまわりに回転して得られる不透明な立体をＶとする。Ｖの表面上ｚ座標１のところに一つの点光源Ｐがある。ｘｙ平面上の原点を中心とする円Ｃの、Ｐからの光が当たっている部分の長さが２πであるとき、Ｃのかげの部分の長さを求めよ。＜東京大＞

８９．　直方体ＯＡＤＢ－ＣＥＧＦにおいて、各辺ＯＡ，ＯＢ，ＯＣの長さはそれぞれ２，２，１である。対角線ＯＧを含む面でこの直方体を切断するとき、切り口の面積の最大値と最小値を求めよ。＜静岡大＞



９０．　Ｏ$(0,0,0)$を原点とし、空間内に４点Ａ$(2,0,0)$，Ｂ$(0,3,0)$，Ｃ$(0,0,1)$，Ｅ$(0,1,0)$をとる。＜山口大＞

（１）　点Ｐは線分ＢＣ上にあり、三角形ＡＥＰは三角錐ＯＡＢＣの体積を２等分するという。このとき、Ｐの座標を求めよ。

（２）　点Ｑが線分ＢＣ上を動くとき、三角形ＡＥＱの面積が最小となるときのＱの座標と、そのときの三角形ＡＥＱの面積を求めよ。

９１．　ｘｙｚ空間における、ねじれの位置にある２直線

$$m: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = z-5 \quad ; \quad n: \frac{x+4}{-3} = y-2 = \frac{z+1}{5}$$

の間には共通垂線ｋが存在することを示し、２直線ｋとｍの交点Ａおよび２直線ｋとｎの交点Ｂの座標をもとめよ。

９２．　互いに競合する会社Ａと会社Ｂがあり、それぞれ甲地区あるいは乙地区のどちらかに毎日かならず一度ずつ製品を出荷している。会社Ａが甲地区に製品を出荷する日数の合計は、全出荷日数に対してｘ($0 \leq x \leq 1$)の割合であり、同様に会社Ｂが甲地区に製品を出荷する日数の割合はｙ($0 \leq y \leq 1$)であるという。このときあるコンサルティング会社Ｃの調査によれば、会社Ａ，Ｂそれぞれの一日の利益ａ，ｂは以下の表のようになることが分かった。

会社Ａの利益：ａ

	Ｂが甲に出荷	Ｂが乙に出荷
Ａが甲に出荷	3	4
Ａが乙に出荷	5	2

会社Ｂの利益：ｂ

	Ｂが甲に出荷	Ｂが乙に出荷
Ａが甲に出荷	1	4
Ａが乙に出荷	3	2

会社Ａの一日の利益の期待値をｐ、会社Ｂ一日の利益の期待値をｑとするとき、以下の設問に答えよ（ゲーム理論の非ゼロ和ゲームにおける確率型混合戦略）。＜東京大＞

（１）　会社Ａと会社Ｂが独立に意思決定をして出荷地区を選ぶとき、ｐ，ｑをそれぞれｘ，ｙで表せ。

（２）　会社Ｃの調べによるとｘ＝ｙであるという。会社Ｃはｐ＋ｑの値が最大になるように会社Ａに情報ｘを提供したい。このｘの値を求めよ。またそのときのｐ＋ｑの値を求めよ。ただし、会社Ａ，Ｂは独立に意思決定するものとする。

（３）　会社Ａと会社Ｂとがお互いに相談してｐ＋ｑの値を最大にするには、ｘおよびｙの値をそれぞれいくらにすればよいか（協調解）。

（４）　会社Ａ，Ｂは互いに独立に意思決定するものとする。ある期間において、会社Ｂが、会社Ａにとって最も不利になるようにｙを決めても、会社Ａは自社の利益の期待値ｐが最大になるようにしたい(Min-Max 戦略、最悪ケースの最適化)。このときのｘの値およびｐの値を求めよ。

９３．　Ｈを１辺の長さが１の正六角形の周および内部とする。＜一橋大改＞

（１）　Ｈに含まれる長方形のうち、１辺がＨの周囲である正六角形の１辺と平行であるものの面積の最大値を求めよ。

（２）　Ｈに含まれる正方形のうち、１辺がＨの周囲である正六角形の１辺と平行であるものの面積の最大値を求めよ。

（３）　Ｈに含まれる正方形の面積の最大値を求めよ。

９４．　ＡＢ＝ＣＤ＝８，ＡＣ＝ＢＤ＝１０を満たす四角形ＡＢＣＤにおいて、辺ＡＢを５：３に内分する点をＥとし、対角線ＡＣ，ＢＤの交点をＦとする。このとき、ＥＦの長さの最小値を求めよ。

９５．　ｘｙ平面上において

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b>0)$$

で与えられる楕円の１つの焦点Ｆを通り直交する２直線がこの楕円と交わる点をそれぞれP_1，P_2；Q_1，Q_2とする。このとき、和$P_1P_2+Q_1Q_2$の最大値と最小値を求めよ。

９６．　現在Ｂ船はＡ船の北方５０km のところにある。Ａ船は北１５$^{\circ}$西に向かって、Ｂ船は南４５$^{\circ}$東に向かって、両船は同時に出発し、同じ速さで進むものとする。今後の両船の進路上での両船間の最短距離を求めよ。

９７．　直角に交差する航空路を航空機Ａと航空機Ｂが同一高度で地点Ｏに向け、それぞれ巡航対地速度V_1及びV_2で水平飛行している。現在時点でのＡ機及びＢ機の地点Ｏからの距離はそれぞれr_1及びr_2である。また航空航法上規定される航空機相互間の水平距離の許容最小値をＤとする。周辺に他の航空機はないものとし、風・気流に伴う対気速度と対地速度の差及び速度の不確定性の影響はないと仮定して、以下の問いに答えよ。＜S&J 塾作成問題＞

（１）　Ａ機とＢ機が航空管制による指示を受けることなく、このまま安全に水平飛行できるための必要十分条件は、以下の式で表せることを証明せよ。

$$D^2\ (V_1^2+V_2^2)\ <\ (r_1V_2-r_2V_1)^2$$

（２）　Ａ機とＢ機の巡航対地速度はともに等しく、$V_1=V_2=V$とする。いま、このまま同一速度で両機が水平直進飛行を続けると、時刻t_p後に地点Ｏで完全衝突が予想される最もシビアなケース（すなわち$r_1=r_2=Vt_p$）を考える。いまある時点で同時に、航空管制側の指示に従って、Ａ機の速度を増速し、Ｂ機の速度を減速することによって、両機が相異なる巡航速度で水平直進飛行をさせることにより、両機の安全性を維持することを考える。航空機の飛行性能要件及び運航経済性から、Ａ機は最大 $100q_1$パーセントまでしか現行の巡航速度からの増速ができないものとし、Ｂ機は最大 $100q_2$パーセントまでしか現行の巡航速度からの減速ができないものとする。このとき、遅くともどの地点で両機に速度変更指令を出さなければ両機の安全性が維持できなくなるか、すなわちＯＡ＝ＯＢ＝ｒの最小値r_{MIN}を、Ｄ，q_1及びq_2を用いて表せ。但し、航空管制が速度変更指令を出してから、両機がエンジンスロットルを調整し実際に所定の速度に変更されるまでのタイムラグは無視できることとする。

（３）　（２）で、Ｖ＝400kt，Ｄ＝3.0nm，$q_1=0.03$，$q_2=0.05$とするとき、遅くとも衝突予想時刻の何分前に航空管制側は速度変更指令を出さなければならないか、すなわちt_pの最小値を算出せよ。答えは何分何秒単位で、小数点第二位を四捨五入し小数点第一位まで正確に求めよ。但し、1.0(kt)＝1.852(km／h)，1.0(nm)＝1.852(km)とする。

（補足）以上からも分かるように、速度変更による安全性の維持には交通流の長期的予測が必要であり、周辺航空機の存在や速度不確定性の影響の観点から見て望ましい戦略とはいえず、緊急的な衝突回避に対しては無力な戦略といえる。実際の航空管制では、高度変更及び方位変更の指示による衝突回避戦略を行う。３機以上の航空機の衝突が予想される場合の回避経路の決定問題は数学的にも興味深い。

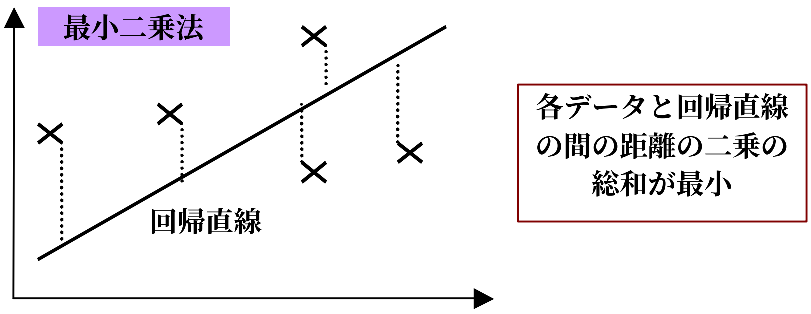
９８．　あらかじめ２つのデータに特定の関数モデルで表現できる関係があると分かっている場合、実験で得られたデータ分布から統計的に最も確からしい関数パラメタを決定する方法に「最小二乗法（最小自乗法）」が知られている。いま N 個のデータ $(x_i, y_i);\ i = 1,2,\cdots,N$ に対して、そのデータにフィッティングする関数モデルが一次関数 $y = ax + b$ であると想定される場合を考えよう。最小二乗法（最小自乗法）では、各データのｙ座標の値の求める直線に対する誤差の二乗を全データに対して総和した値を最小にする、すなわち

$$J = \sum_{i=1}^{N}\left[\, y_i - (ax_i + b)\right]^2 \to \min$$

を満たすように直線を引く。この直線を「回帰直線」という。このとき、

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{N} x_i)(\sum_{i=1}^{N} y_i)}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2};\quad b = \frac{(\sum_{i=1}^{N} y_i)(\sum_{i=1}^{N} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{N} x_i)(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i)}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}$$

で与えられることを証明せよ。



上級レベル

９９．　ｘｙｚ空間においてｘｙ平面上に円板Ａがあり、ｘｚ平面上に円板Ｂがあって、次の２条件をみたしている。
　（ａ）Ａ，Ｂは原点からの距離が１以下の領域に含まれる。
　（ｂ）Ａ，Ｂは１点Ｐのみを共有し、Ｐはそれぞれの円周上にある。
このような円板ＡとＢの半径の和の最大値を求めよ。但し、円板とは円の内部と円周を合わせたものを意味する。＜東京大＞

１００．　　　線分ＡＢを直径とする半円がある。周上の弧ＰＱを弦ＰＱで折り返したとき、折り返された弧が線分ＡＢに接したとする。このような弧ＰＱの存在する範囲を図示せよ。＜千葉大＞

１０１．　　　放物線

$$C:\quad y=\frac{5}{4}-x^2\quad \left(|x|<\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

上の動点Ｐから円$x^2+y^2=1$に接線を引く。この接線と円との接点をＱ，Ｒとするとき、線分ＱＲ（端点も含む）の通過する領域を図示せよ。

１０２．　　　ｘｙ平面上の２点Ｐ，Ｑに対し、ＰとＱをｘ軸またはｙ軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値をｄ(Ｐ，Ｑ)で表す。＜東京大＞

（１）　原点Ｏ(０，０)と点Ａ(１，１)に対し、ｄ(Ｏ，Ｐ)＝ｄ(Ｐ，Ａ)をみたす点Ｐ(ｘ，ｙ)の範囲をｘｙ平面上に図示せよ。

（２）　実数$a\geq 0$に対し、点Ｑ(a,a^2+1)を考える。次の条件(＊)を満足する点Ｐ(ｘ，ｙ)の範囲をｘｙ平面上に図示せよ。

　(＊)「原点Ｏ(０，０)に対し、ｄ(Ｏ，Ｐ)＝ｄ(Ｐ，Ａ)となるような$a\geq 0$が存在する」

１０３．　　　１０枚のカードに１から１０までの数が１つずつ書かれている。これらのカードを用いた次のようなゲームを考える。ｒを自然数とする。このゲームは最大ｒラウンドからなり、第１ラウンドから始まる。各ラウンドで、プレーヤーは１０枚のカードから１枚のカードを抜き出し、その数を見てから、「停止」または「続行」のいずれかを選択する。「停止」を選択した場合は、そのラウンドでゲームは終了し、最後に抜き出したカードに書かれた数が得点となる。「続行」を選択した場合は、抜き出したカードをもとにもどして、次のラウンドを実行する。最終ラウンドでは、「停止」しか選択できず、そのラウンドで抜き出したカードに書かれた数が得点となる。但し、各ラウンドで、どのカードも等しい確率１/10で抜き出されるものとする。

　抜き出したカードに書かれた数ｘによって「停止」または「続行」を選択する規則を、そのラウンドにおける戦略という。戦略はラウンドごとに、０または１をとる関数$f(x)\quad(x=1,2,---,10)$によって、$f(x)=0$ならば「続行」、$f(x)=1$ならば「停止」と定める。＜東京大＞

（１）　ｋは、$1\leq k<10$を満たす自然数とする。関数$f_k(x)$を

$$f_k(x)=\begin{cases}0 & (1\leq x\leq k)\\ 1 & (k<x\leq 10)\end{cases}$$

とする。すべてのラウンドで、$f_k(x)$によって定まる戦略を採用したときの得点の期待値を、ｒとｋで表せ。

（２）　ラウンド数ｒが２のとき、得点の期待値が最大となるような、第１ラウンドでの戦略を与え、そのときの得点の期待値を求めよ。

（３）　ラウンド数ｒが３のとき、得点の期待値が最大となるような、第１ラウンドおよび第２ラウンドでの戦略をそれぞれ与え、そのときの得点の期待値を求めよ。