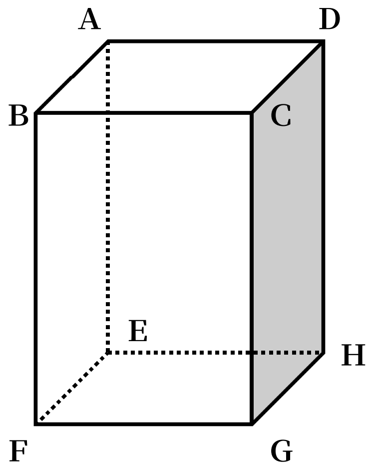
中学３年
「三平方の定理　立体図形」　　演習問題

基礎レベル

１．図はＡＢ＝ＢＣ＝２cm、ＢＦ＝５cm の直方体である。各設問に答えよ。
（１） △ＡＢＧの面積を求めよ。
（２） 三角錐Ｇ－ＡＢＣの体積を求めよ。
（３） 頂点Ｃより平面ＡＢＧに下ろした垂線の長さを求めよ。
（４） 直方体の内部で、底面が面ＢＦＧＣ、面ＡＥＨＤに含まれ、３つの面ＡＢＦＥ，ＥＦＧＨ，ＡＢＧに接するような円柱の体積を求めよ。



２．一辺の長さがａの正四面体ＡＢＣＤについて、以下の設問に答えよ。
（１） この正四面体の表面積を求めよ。
（２） 頂点Ａから△ＢＣＤに下ろした垂線の足をＨとするとき、Ｈは△ＢＣＤの外心、内心、垂心、重心であることを証明せよ。またＡＨの長さを求めよ。
（３） この正四面体の体積を求めよ。
（４） 辺ＡＢ，ＡＣ，ＡＤ上に３点Ｐ，Ｑ，Ｒをとり、ＡＰ：ＰＢ＝１：２，ＡＱ：ＱＣ＝３：５，ＡＲ：ＲＤ＝２：３とする。三角錐ＡＰＱＲの体積及び頂点Ａから△ＰＱＲに下ろした垂線の長さを求めよ。
（５） この正四面体の外接球の半径を求めよ。
（６） この正四面体の内接球の半径を求めよ。
（７） 各辺の中点を頂点とする立体図形は何か。その体積も求めよ。

３．底面の円の半径が１０cm、母線の長さが３０cm の直円錐の表面積と体積を求めよ。

４．半径１の球に内接する正八面体において、次の各値を算出せよ。

（１）　一辺の長さ

（２）　表面積

（３）　体積

（４）　相対する二面間の距離

（５）　この正八面体に内接する球の半径

５．四面体ＡＢＣＤにおいて、∠ＢＤＣ＝∠ＣＤＡ＝∠ＡＤＢ＝９０°, ＡＤ＝ＢＤ＝３ａ、ＣＤ＝４ａとする。以下の設問に答えよ。

（１）　頂点Ｃより辺ＡＢに下ろした垂線の足をＨとするとき、ＤＨ⊥ＡＢを証明せよ。

（２）　ＤＨとＣＨの長さを、ａを用いて表せ。

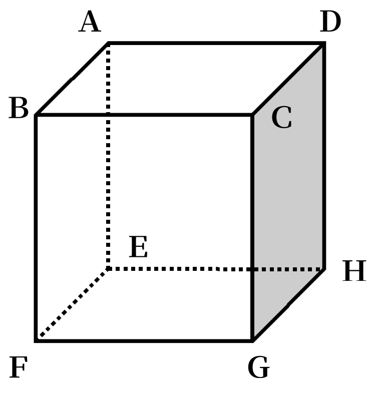
（３）　四面体ＡＢＣＤの体積を求めよ。

６．図のような１辺の長さが１の立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨがある。半径ｒ（０＜ｒ＜１）の球O_1が３つの面ＡＢＣＤ, ＡＥＨＤ, ＡＥＦＢに接しているとき、次の問に答えよ。

（１）　対角線ＡＧの長さを求めよ。

（２）　この球O_1の中心は対角線ＡＧ上にあることを証明せよ。

（３）　この球O_1と半径の等しい球O_2が、球O_1に外接し、かつ頂点Ｇを通る３つの平面ＥＦＧＨ，ＢＣＧＦ，ＣＤＨＧに接しているとき、半径ｒを求めよ。

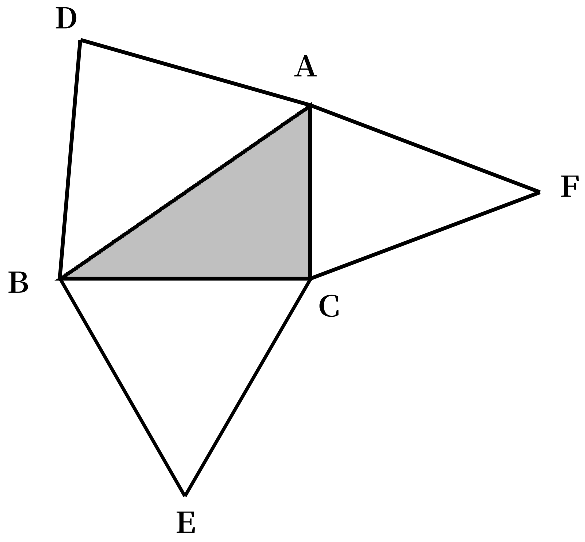


７．底面の円の半径が５cm、母線ＡＢの長さが３０cm の直円錐がある。母線ＡＢ上でＡＣ＝１８cm なる点Ｃをとる。点Ｃから円錐の側面上を２周して点Ｂにいたる経路のうち最短距離を計算せよ。

８．図は三角錐の展開図である。底面は∠Ｃ＝９０°の直角三角形で、ＡＢ＝２０cm，ＡＣ＝１０cm である。また側面は全て二等辺三角形で、ＡＤ＝ＢＤ＝ＡＦ＝ＣＦ＝ＢＥ＝ＣＥ＝２０cm である。各設問に答えよ。

（１） 頂点Ｄ（Ｅ，Ｆはに一致）から底面ＡＢＣへの垂線の足は辺ＡＢ上に存在することを証明せよ。

（２） この三角錐の体積を求めよ。



９．いま底面が正方形ＡＢＣＤであり、各辺の長さが全て長さａに等しい、正四角錐Ｏ－ＡＢＣＤを考える。側辺ＯＢ，ＯＤの中点をそれぞれM，Ｎとし、３点Ａ，M，Ｎによって作られる平面と側辺ＯＣとの交点をＬとする。以下の設問に答えよ。

（１） ＯＬ：ＬＣの比の値を求めよ。

（２） MNおよびＡＬの長さを求めよ。

（３） 四角形AMＬＮの面積を求めよ。

（４） 四角錐Ｏ－AMＬＮの体積を求めよ。

（５） 点Oから３点Ａ，M，Ｎが作る平面に下ろした垂線の長さを計算せよ。

１０． 辺の長さがａである立方体の４つの頂点を適当に選び、順次に結ぶと正四面体が得られることを示し、一辺の長さ、表面積、体積をそれぞれ、ａを用いて表せ。

１１． 表面積が等しい正四面体と立方体の体積比を求めよ。

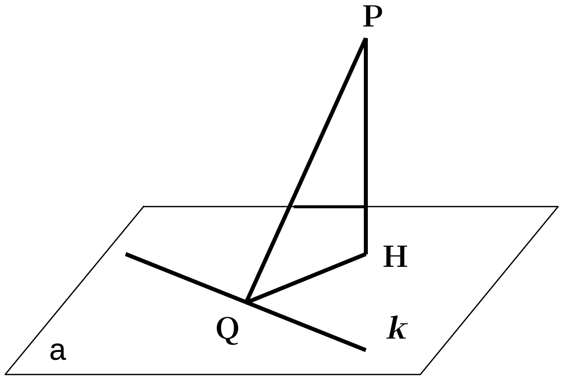
中級レベル

１２．　空間図形における次の基本的性質を証明せよ。

（１）２直線m, nが平行で、平面ａ がmを含みnを含まないならば、ｎは平面ａ と平行である。

（２）平面ｂ 上の交わる２直線ａ，ｂに垂直な直線kは、平面ｂ 上の全ての直線と垂直である。

１３．　図において、以下の各命題を証明せよ。（三垂線の定理と呼ばれている。）



直線k⊂平面ａ
点Ｑ⊂直線k
点Ｈ⊂平面ａ

（１）ＨＰ⊥ａ，ＨＱ⊥k　⇒　ＰＱ⊥k

（２）ＨＰ⊥ａ，ＰＱ⊥k　⇒　ＨＱ⊥k

（３）ＨＰ⊥ＨＱ，ＨＱ⊥k，ＰＱ⊥k　⇒　ＨＰ⊥ａ

１４．　半径ｒの球をちょうど包み、その高さがｈである直円錐の底面の円の半径、表面積および体積を求めよ。

１５．　内壁の１辺の長さが２ａの立方体の容器に水が満たされている。まず半径ａの剛球をこの中に入れた。次にこの水中に完全に没する１つの小剛球を入れて、こぼれ出る水の量を最大にしたい。この小剛球の半径はいくらか。また２つの球を入れたためにこぼれ出た水の量は、はじめに容器に満たされていた水の量の何%か。

１６．　地球を球と考え（実際は扁平であるが）、その大円（球の中心を通る平面で地球を切ったときできる円）の一周を４万 km とする。いま経度０度、北緯４５度の地点Ｐ（英国付近）と東経１３５度、緯度０度の地点Ｑ（南太平洋）との球面上の距離（Ｐ，Ｑおよび地球の中心を含む平面で地球を切断したときに出来る大円上の短い方の弧ＰＱの長さ）を計算せよ。

１７．　高さ６の直円錐の頂点をＡとし、底面の中心をＯとする。また底面の周を円Ｏとする。円Ｏに長さ８の弦ＢＣをひく。以下の設問に答えよ。＜開成高＞

（１）　三角形ＡＢＣを直線ＡＯ（円錐の軸）まわりに１回転して出来る立体の体積を求めよ。

（２）　∠D＝１５°の三角形ＢＣＤが円Ｏに内接しているとき、円Ｏの半径と三角錐ＡＢＣＤに外接する球の半径を求めよ。

１８．　半径１の全く同じ３つのガラス球が机においてある。以下の各設問に答えよ。

（１）　この３つのガラス球を机上で完全に覆うことが出来る最も小さい半球の蓋の半径を計算せよ。

（２）　（１）のとき、３つのガラス球と机のいずれにも接するような小ガラス球を挿入したい。そのような小ガラス球の半径を求めよ。

（３）　（１）のとき、蓋と３つのガラス球の上部の隙間に出来る空間に小さな別のガラス球を挿入したいとする。そのような小ガラス球の半径の最大値を求めよ。

（４）　（１）のとき、２つのガラス球と蓋と机のいずれにも接するような小ガラス球を挿入したいとする。そのような小ガラス球の半径を求めよ。

＜S＆Ｊ塾作成問題＞

１９．　広大かつ水平で平坦な大地に一本の鉄塔が建っており、回りには障害物は何もないものとする。いまある人が鉄塔の真南にいて、その鉄塔から離れていく方向に直線上を秒速１ｍでゆっくりと歩きだした。歩き出した時点での鉄塔の仰角は６０°、１０秒後には４５°、２０秒後には３０°になったという。この鉄塔の高さを求めよ。またこの人の歩いている直線の方向は何か。

２０．　底面の正方形の一辺の長さが１である正四角錐の隣り合った側面どうしのなす角が１２０°であるとき、この四角錐の体積を求めよ。

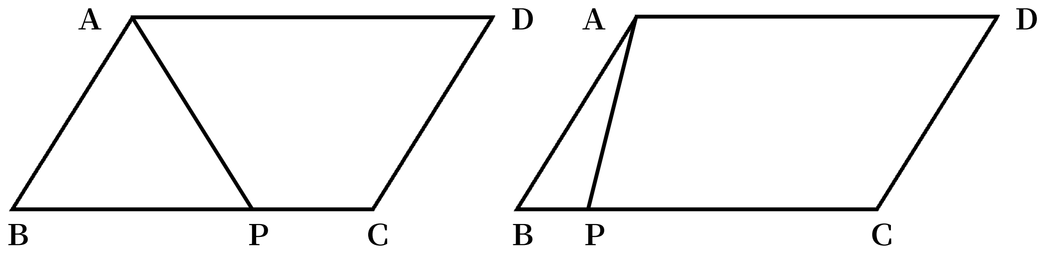
２１．　両底面の面積がそれぞれＡとＢで高さがｈの角錐台の体積は

$$\frac{p}{3}\cdot h\cdot(A+\sqrt{AB}+B)$$

で与えられることを証明せよ。

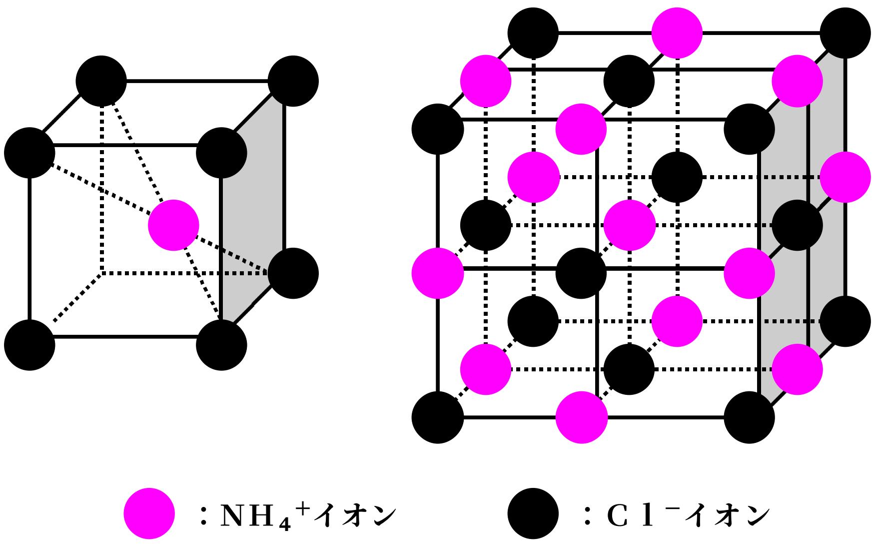
２２．　縦横それぞれ１０cm，２０cm の長方形を底面とし、４本の側辺が底面に垂直な四角柱がある。これを底面の長方形の１頂点を通る平面で切ったとき、切り口がひし形で、かつこの平面と側辺との交点のうち底面から最も高い点が底面から３０cm の高さにあったという。このひし形の２本の対角線の長さと面積を求めよ。

２３．　ＡＢ＝２，ＢＣ＝３，∠ＡＢＣ＝６０°の平行四辺形ＡＢＣＤがある。線分ＢＣ上に点Ｐをとり、△ＡＢＰを直線ＡＢを軸として１回転させて出来る立体の体積と、台形ＡＰＣＤを直線ＡＤを軸として１回転させて出来る立体の体積を等しくしたい。ＢＰの長さをどのようにとればよいか。＜武蔵高＞



２４．　塩化アンモニウムの結晶は、室温付近では図１のような塩化セシウム型の結晶構造をもつが、２５０℃以上では図２のような塩化ナトリウム型の結晶構造に変化することが知られている。ここで、アンモニウムイオン（NH_4^+イオン）と塩化物イオン（Cl^-イオン）はともに球状とみなし、それぞれの半径をaÅおよびbÅとする。（但し、１Åは10^{-8}㎝である。）また、図１や図２は模式図であり、実際の結晶格子内ではアンモニウムイオン（NH_4^+イオン）と塩化物イオン（Cl^-イオン）は互いに接している。このとき、両結晶の密度比（図１の結晶密度／図２の結晶密度）を求めよ。（ヒント：図１と図２では１格子内の塩化アンモニウムの単位数が異なることに注意）

図１　　　　図２



：NH_4^+イオン　　：Cl^-イオン

２５．　四面体ＡＢＣＤの６つの辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＤ，ＡＤ，ＡＣ，ＢＤの中点をそれぞれK，L，M，N，P，Qとするとき、以下の各条件を満たす四面体の形状に関する定量的性質をそれぞれ述べよ。

（１）　KM＝ＬＮ＝ＰＱ

（２）　KM⊥ＬＮ，ＬＮ⊥ＰＱ，ＰＱ⊥ＫＭ

（３）　（１）と（２）を同時に満足する

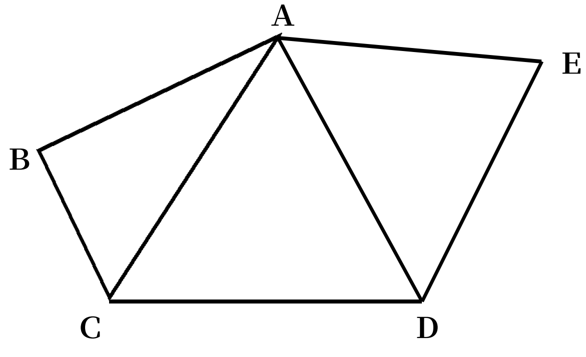
２６．　一辺の長さが６cm の正三角形ＡＢＣがあり、その辺ＢＣは平面 π 上に、点Ａは平面 π の上側にある。平面 π に垂直な平行光線を△ＡＢＣにあてたところ、平面 π 上にできるその影は直角三角形ＨＢＣになった。また平面ＡＢＣに垂直な平行光線を△ＡＢＣにあてたところ、平面 π 上にできるその影は△ＤＢＣになった。このとき以下の各設問に答えよ。＜筑波大付属高＞

（１）　線分ＡＨの長さを求めよ。

（２）　△ＤＢＣの面積を求めよ。

（３）　平面Ｐに垂直な△ＥＢＣを平面 π の上側につくり､平面ＡＢＣに垂直な平行光線をこの△ＥＢＣにあてたところ、平面ＡＢＣ上に出来るその影が、ちょうど△ＡＢＣと重なった。このとき四面体ＡＢＣＤの体積は四面体ＡＢＣＥの体積の何倍か。

２７．　下図は四面体の展開図ですが、面が一枚足りません。ＡＣ＝ＣＤ＝ＡＤ＝５cm、ＡＥ＝ＤＥ＝４cm で、∠ＡＢＣ＝９０°です。足りない面を、展開図の適切な位置に一枚書き加え、その図形に各辺の長さを記入しなさい。またこの四面体の体積を求めなさい。＜筑波大付属駒場高＞



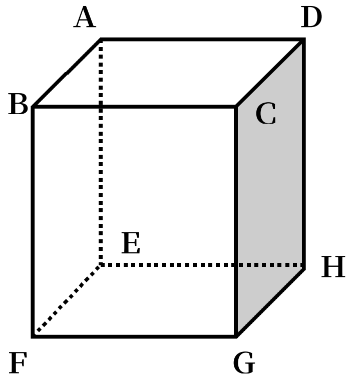
２８．　２直線*m*，*n*はねじれの位置にある。両直線*m*，*n*上にない点Ｐを通って両直線*m*，*n*の両方と交わる直線を得る作図法を述べよ。またこのような直線が存在しないことがあるが、それはどのような場合か。

２９.　図のように、一辺の長さが６cm、∠ＡＢＣ＝６０°のひし形ＡＢＣＤを底面とし、側面が長方形である四角柱ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨがある。この四角柱の辺ＡＥ上に点Ｐをとったところ、∠ＢＰＤ＝∠ＤＰＧ＝∠ＧＰＢ＝９０°となった。このとき以下の各設問に答えよ。＜筑波大付属高＞

（１）　線分ＡＰの長さを求めよ。

（２）　この四角柱の高さを求めよ。

（３）　点Ｐから平面ＢＤＧに垂線を引いたとき、この垂線の長さを求めよ。

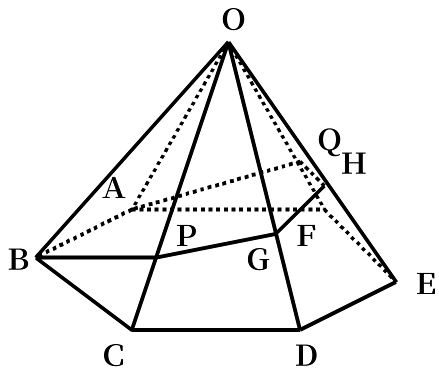


３０.　一辺の長さが１cm の正六角形を底面とし、等しい辺の長さが２cm の合同な二等辺三角形６個を側面とする正六角錐Ｏ－ＡＢＣＤＥＦがある。ＯＤの中点をＧとし、３点A，B，Ｇを通る平面でこの正六角錐を切断したとき、平面とＯＣ，ＯＥ，ＯＦの交点をそれぞれＰ，Ｈ，Ｑとする。以下の設問に答えよ。＜開成高＞

（１）　線分ＰＱの長さを求めよ。

（２）　切り口ＡＢＰＧＨＱの面積を求めよ。

（３）　六角錐Ｏ－ＡＢＰＧＨＱの体積を求めよ。



３１.　一辺の長さが１の正八面体を任意の一つの面と平行な平面で切ったときの切り口の図形の周の長さは一定であることを証明し、その長さを求めよ。＜東京大＞

３２．　８つの辺ＡＢ，ＡＣ，ＡＤ，ＡＥ，ＦＢ，ＦＣ，ＦＤ，ＦＥの長さがすべて３ａの正八面体ＡＢＣＤＥＦを考える。ＡＢを１：２に内分する点をＰとし、ＡＣおよびＡＥを２：１に内分する点をそれぞれQ，Ｒとする。このとき、３点Ｐ，Ｑ，Ｒを含む平面でこの正八面体を切ったときにできる切り口は何角形か。またこの切り口の図形の周囲の長さと面積を計算せよ。またこの切断で分けられた２つの立体のうち体積が小さい方の立体の体積を求めよ。

３３．　一辺の長さがａである正四面体ＡＢＣＤがある。２つの対辺ＡＤ，ＢＣの中点をそれぞれM，Ｎとするとき、次の各問に答えよ。

（１）　辺ＡＤは△ＭＢＣが作る平面に垂直であることを証明せよ。

（２）　線分MN上でMからの距離がｘである点Ｐを通ってMNに垂直な平面でこの正四面体を切断したときに、切り口の面積をｘで表せ。

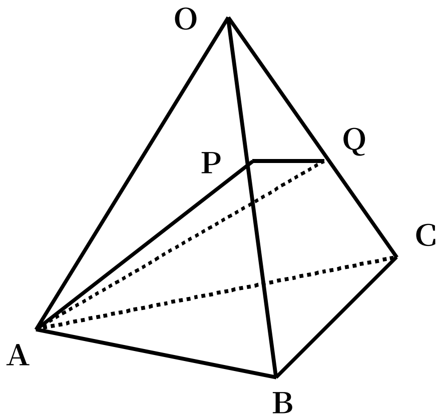
３４．　三角錐Ｏ－ＡＢＣにおいて、ＡＢ＝ＢＣ＝ＣＡ＝ａ，ＯＡ＝ＯＢ＝ＯＣ＝２ａである。図のように、頂点Aを通り、辺ＯＢ，ＯＣと交わるような平面でこの三角錐を切断する。このとき以下の各設問に答えよ。

（１）　切り口に出来る△ＡＰＱのうちで周囲の長さが最も短くなるときの△ＡＰＱの形状と面積を求めよ。

（２）　（１）の△ＡＰＱによって切り取られた上側の三角錐と下側の四角錐の体積の比を求めよ。

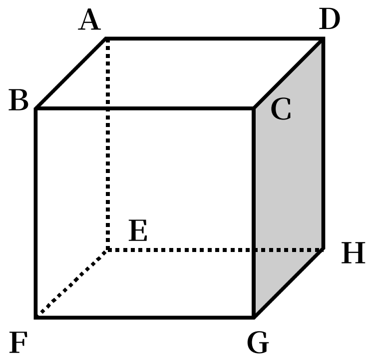
（３）　ＯＰ：ＰＢ＝２：１，ＯＱ：QC＝１：２のとき、△ＡＰＱの形状と面積を求めよ。

（４）　（３）の△ＡＰＱによって切り取られた上側の三角錐と下側の四角錐の体積の比を求めよ。



３５．　一辺の長さが１の立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨがある。対角線ＡＧに点Ｐを $AP = k \cdot AG$ となるようにとる。$0 \leq k \leq 1$ の範囲で点Ｐを動かすとき、点Ｐを通り対角線ＡＧに垂直な平面でこの立方体を切断したときに出来る図形の面積を $S(k)$ とする。$S(k)$ をｋの関数として求め、$y = S(k)$ のグラフを図示せよ。<S&J塾作成問題>

３６．　一辺の長さが１の立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨがある。辺ＡＢおよび辺ＡＤ上に点Ｑ，Ｒをとり、ＡＱ＝ＡＲ＝1/2 とする。また辺ＦＧ上にＦＰ＝ｘなる点Ｐをとる。いま３点Ｐ，Ｑ，Ｒを含む平面でこの立方体を切断したときに出来る切り口の平面図形の周囲の長さを $L(x)$ 、面積を $S(x)$ 、また切断によってできる２つの立体のうち点Ｃを含む立体の体積を $V(x)$ とする。ｘ＝0, 1/4, 1/2, 1 のときの切り口の周囲の長さ $L(x)$, 面積 $S(x)$ ，体積 $V(x)$ をそれぞれ求めよ。



３７．　同一平面上にない４つの点を通る球（任意の四面体の外接球）はただ一つ存在することを示せ。またその外接球の中心を定量的に求める方法も述べよ。

３８．　空間内に互いに直交し一点Ｏで交わる３本の直線 k, m, n がある。各直線 k, m, n を軸にもち半径２の円を底面にもつ無限に長い直円柱をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒとする。この３つの立体Ｐ，Ｑ，Ｒの共通部分の立体をＳとする。直線 k および直線 m が作る平面ａ に平行で、平面ａ との距離が１の２つの平面のうちの１つによって立体Ｓを切断したときに出来る切り口の平面図形の外形を図示し、その面積を計算せよ。

上級レベル

３９．　四面体ＯＡＢＣにおいて、∠ＡＯＢ＝９０°,∠ＢＯＣ＝４５°,∠ＣＯＡ＝６０°, ＯＡ＝２，ＯＢ＝４，ＯＣ＝３であるという。この四面体ＯＡＢＣの表面積と体積を求めよ。<S&J塾作成問題>

４０．　高さ$10\sqrt{2}$、底面の円の半径が５の直円錐が水平な机の上においてある。この直円錐の頂点をＡとし、Ａと底面の円の中心を結ぶ軸上に点Ｏをとり、ＡＯ＝$4\sqrt{2}$とする。点Ｏを通り底面に平行な平面でこの直円錐を切った切り口は点Ｏを中心とする円になるが、これを円Ｏとする。いま円Ｏの周上を図のように８等分し、各点を順にＢ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈ，Ｉと名付ける。母線ＡＦの中点をＪとする。いま２点Ｂ，Ｄを通り、底面との交線が円Ｏの直径ＢＦと垂直になる平面ａで円錐を切断したとき、円錐の側面上に出来る切り口の図形をΓとする。各母線ＡＣ，ＡＤ，ＡＥと図形Γとの交点（接点）をそれぞれＫ，Ｌ，Ｍとする。また直円錐の内部に存在し、しかもこの直円錐の側面と平面ａの双方に接する２つの球のうち、小さい方の球の中心と半径をそれぞれS_1，r_1、大きい方の球の中心と半径をそれぞれS_2，r_2とする。以下小さい方の球を球S_1、大きい方の球を球S_2と呼ぶことにする。球S_1、球S_2と平面ａの接点をそれぞれF_1，F_2とする。以下の各設問に答えよ。＜S＆Ｊ塾作成問題＞

（１）　ＢＪの長さを求めよ。

（２）　ＡＫ，ＡＬ，ＡＭそれぞれの長さを求めよ。

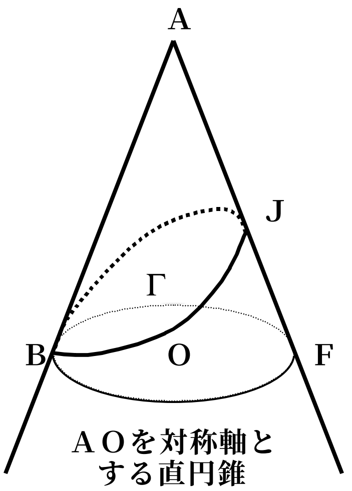
（３）　r_1およびr_2の値を求めよ。

（４）　BF_2，F_2F_1，F_1Jそれぞれの長さを求めよ。

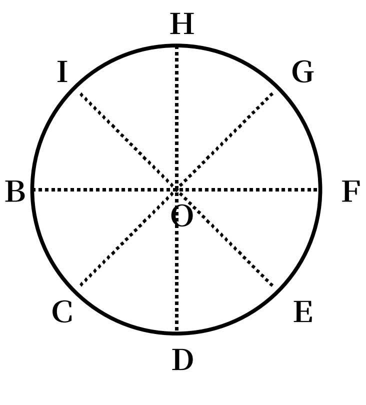
（５）　図形Γ上の任意の点Ｐに対して、PF_1とPF_2の長さの和は点Ｐの位置によらず一定であることを幾何学的に証明し（高校生であれば解析的にも証明できるが、あくまで幾何学的に証明すること）、その一定値を求めよ。

（６）　点Ｂからこの直円錐上を一周して点Ｂに戻る「紐」をかけるとき、その最短距離を求めよ。またそのような「紐」が円錐の表面上に作る図形は（図形Γに一致せず）いかなる平面上にものらないことを証明せよ。

（７）　（三角関数および微分法を履修した高校生・インター生は）（６）において「紐」がつくる最短経路上の全ての点が平面ａの上側にあることを証明せよ。



ＡＯを対称軸とする直円錐



円Ｏの８等分点

<u>ヒント</u>：（２）（７）を解く際は、Ｏを原点、底面の円Ｏの直径ＢＦをｘ軸、直円錐の軸ＡＯをｙ軸として、直円錐を△ＡＢＦを含む平面（ｘｙ平面）で切断したときの断面上への正射影をもとに、各直線の式を計算してみよ。

（解説）ソクラテス、アリストテレスと並ぶギリシャの３大偉人の１人プラトンの門人メネクムス（BC375～325）は、かのアレキサンダー大王に「幾何学に王道はなし」と述べたそうであるが、その大きな功績として円錐曲線の発見がある。直円錐を平面で切った切り口が切断面の傾きによって楕円（円は楕円の特別な場合）か放物線か双曲線のいずれかになることを発見した。のちにアポロニウスの円で有名なアポロニウス（BC260～200）は著作「円錐曲線論」に述べているように、直円錐を平面で切った切り口の円錐曲線上の点Ｐ（ｘ，ｙ）の間に、それが楕円か放物線か双曲線かによって、$y^2 < cx, y^2 = cx, y^2 > cx$（ｃは一定）の関係があることを見つけた。楕円、放物線、双曲線を表す英語 Ellipse, Parabola, Hyperbola は、それぞれ<u>不足</u>する、<u>一致</u>する、<u>超過</u>するというギリシャ語から名付けられたものである。彼はまた**楕円の性質：「２定点（焦点と呼ぶ）からの距離の和が一定の軌跡」**および**双曲線の性質：「２定点（焦点と呼ぶ）からの距離の差が一定の軌跡」**を発見した。（５）でいう幾何学的証明はまさにアポロニウスが行ったものである。但しアポロニウスは放物線の焦点や楕円・放物線・双曲線の全てを内包する**円錐曲線（二次曲線）の統一的性質**である**「一定点Ｆ（焦点）にいたる距離と一定直線ｄ（準線）に至る距離との比ｅ（離心率）が一定の軌跡」**という事実は発見できなかった。これは後にパップス（ＡＤ330 頃）によって発見された。（聖文社：笹部貞市郎著「問題解法幾何学辞典」より適宜抜粋）

４１．　高校で履修する積分学の知識を用いず、立体幾何学における<u>カヴァリエリの公理</u>：

「同一平面上におかれた２つの立体を、この平面に平行などんな平面で切断しても２つの切り口の図形の面積が常に等しいときは、この２つの立体の体積は等しい」

および中学で学ぶ初等幾何学の知識だけを用いて、次の２つの事実をそれぞれ証明せよ。

（１）　半径Ｒの球の体積は、$4\pi R^3/3$で与えられる。

（２）　両底面になる円の面積がＡ，Ｂで高さがｈの球台の体積は、次式で与えられる。

$$(A+B)h/2+\pi h^3/6$$

４２．　机の上に、直円錐と半球が底面で円Ｏを共有して置いてある。円Ｏの半径はｒである。（つまり直円錐の底面の円の半径も、半球の半径もｒに等しい。）直円錐の高さを２ｒとする。この直円錐と半球の共通部分の体積を計算せよ。

４３．　半径ｒの球面上に４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがある。四面体ＡＢＣＤの各辺の長さは、$AB=\sqrt{3}$，ＡＣ＝ＡＤ＝ＢＣ＝ＢＤ＝ＣＤ＝２を満たしている。このときｒの値を求めよ。＜東京大＞

４４．　正四面体Ｔと半径１の球面Ｓがあって、Ｔの６つの辺がすべてＳに接しているという。Ｔの一辺の長さを求めよ。またＴの外側にあってＳの内側にある部分の体積を求めよ。＜東京大＞

４５．　すべての面が合同な四面体ＡＢＣＤがある。ｐをｐ＞１を満足する実数とする。ＡＢ＝２ｐ－１、ＢＣ＝２ｐ、ＣＡ＝２ｐ＋１のとき、この四面体の体積を、ｐを用いて表せ。＜東京大改＞