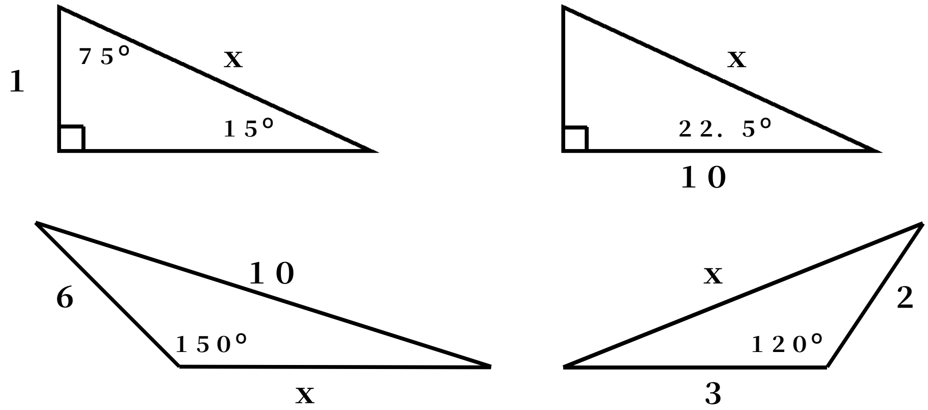
05. Nov. 2005

中学３年
「三平方の定理　平面図形」　　演習問題

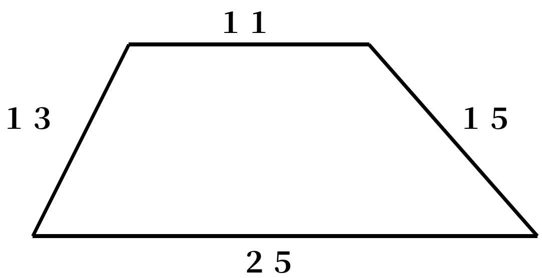
基礎レベル

１．　下図の各三角形におけるｘの値を求めよ。



２．　平行四辺形の隣り合う２辺の長さが１３および１９で、一つの対角線の長さが２４のとき、もう一つの対角線の長さを求めよ。

３．　下図の台形の面積を計算せよ。



３．　等脚台形ＡＢＣＤにおいてＡＢ＝ＣＤ＝１５cm、ＡＤ＝７cm、ＢＣ＝２５cm である。以下の問いに答えよ。

（１）　台形ＡＢＣＤの面積を求めよ。

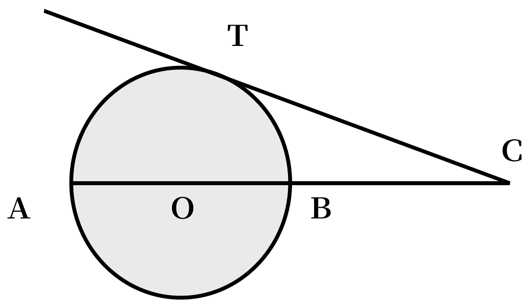
（２）　対角線ＢＤの長さを求めよ。

（３）　台形ＡＢＣＤは円に内接することを示し、この外接円の半径を求めよ。

４．　正方形ＡＢＣＤの対角線ＡＣ上に任意の点Ｐをとるとき、$2BP^2 = AP^2 + CP^2$ が成り立つことを証明せよ。

5．　直径３ｍ と直径１ｍ の円柱型の丸太を太い紐で結束するには、最低一回りにどれだけの長さの紐を要するか。

6．　図のように、円Ｏの直径ＡＢのＢ側を延長してＡＢ＝ＢＣなる点Ｃをとり、点Ｃから円Ｏに接線を引きその接点をＴとする。ＡＢ＝ｘとするとき、ＡＴ，ＢＴ，ＣＴの長さをｘで表せ。



中級レベル

7．　３辺の長さがＡＢ＝１３，ＢＣ＝１４，ＣＡ＝１５の三角形ＡＢＣがある。Ａから対辺ＢＣに下ろした垂線の足をＨ，内角Ａの二等分線と辺ＢＣの交点をＤ，辺ＢＣの中点をＭとする。また三角形ＡＢＣの内心（内角Ａ，Ｂ，Ｃそれぞれの二等分線の交点）をＩとする。以下の各値を計算せよ。

（１）　ＡＨ，ＡＤ，ＡＭの各長さ

（２）　三角形ＡＢＣの面積

（３）　三角形ＡＢＣの内接円の半径

（４）　三角形ＡＢＣの外接円の半径

（５）　ＡＩ，ＢＩ，ＣＩの各長さ

8．　△ＡＢＣにおいて、３辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡの長さがそれぞれ１，２，ｘであるとき、以下の各問いに答えよ。

（１）　ｘのとりうる値の範囲を求めよ。

（２）　△ＡＢＣの面積を最大にするｘの値を求めよ。

（３）　△ＡＢＣの内角∠Ｃを最大にするｘの値を求めよ。またそのときの∠Ｃの最大値を求めよ。

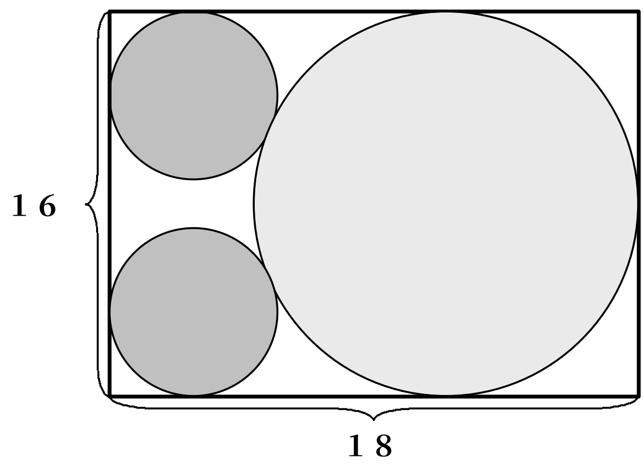
９． 周の長さが３０cm、面積が３０cm^{2}の直角三角形の３辺の長さを求めよ。

１０．△ＡＢＣにおいて、周囲の長さが２０cm、面積が$10\sqrt{3}$ cm^2、かつ∠Ａ＝60°のとき、三辺の長さを求めよ。

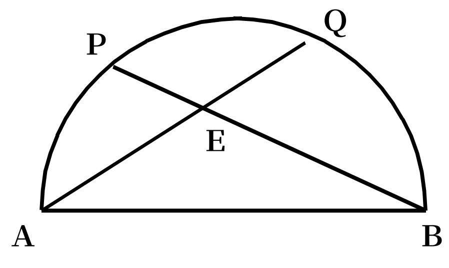
１１．点Ａ（２，４）から直線５ｘ＋１２ｙ－９０＝０へ下ろした垂線の長さを求めよ。

１２．点Ｂの座標は（０，２）、直線mの式はｙ＝ｘ＋３である。また直線２ｘ＋ｙ＝ｋが直線mおよびｘ軸と交わる点をそれぞれＡ，Ｃとする。三角形ＡＢＣが直角三角形になるときのｋの値を全て求めよ。

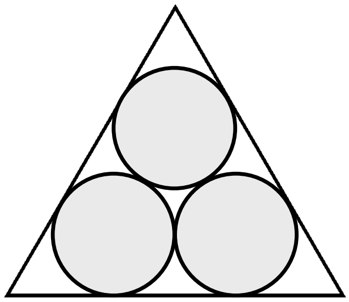
１３．下図で半径の等しい２つの小円の半径を求めよ。



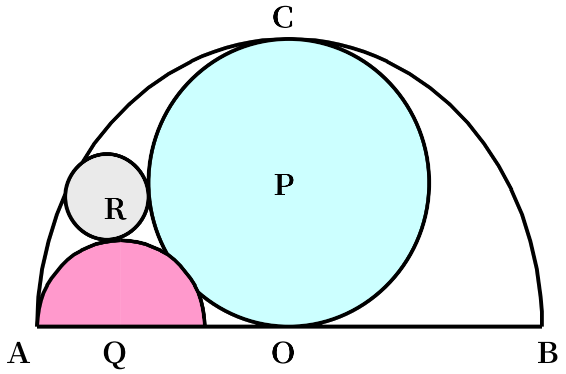
１４．直径が１０cm の半円があり、図のように弧ＡＢ上に２点Ｐ，ＱをＡ，Ｐ，Ｑ，Ｂの順に弧ＰＱの長さが弧ＡＢの長さの３分の １ となるようにとる。線分ＡＱ，ＢＰの交点をＥとする。弧ＰＱを弧ＡＢに沿って端から端まで動かしたとき、点Ｅが描いた曲線（軌跡）の長さおよび弦ＰＱが通過した部分の面積を求めよ。＜筑波大付属駒場高＞



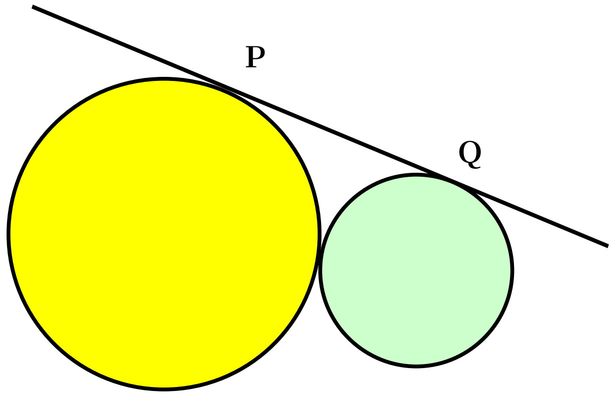
１５．一辺の長さが８cm の正三角形に、３つの半径の等しい円を図のように内接させる。このとき、３円に囲まれた領域の面積を求めよ。



１６．図のように、中心O、半径ｒの半円ＡＣＢに半径ｒ／２の円Ｐを内接させ、この２つの円に接しかつＡＢ上に中心をおく半円Ｑを作り、また２円Ｐ，Ｑに外接し半円ＡＣＢに内接する円Ｒを作る。円Ｑおよび円Ｒの半径をｒを用いて表せ。



１７．外接する２つの円において、一つの共通外接線の接点をＰ，Ｑとすれば、ＰＱの長さの平方は、２つの円の直径の積に等しいことを証明せよ。

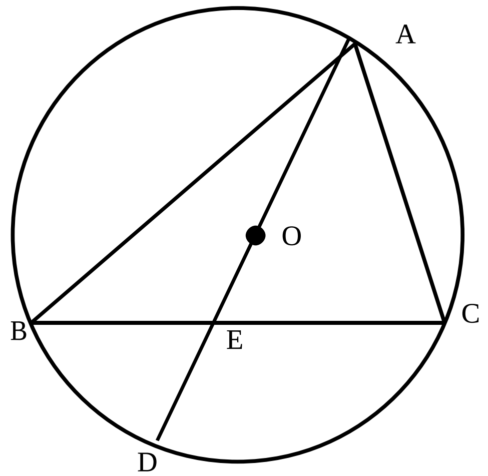


１８．下図で、円Ｐ，Ｑは半径がそれぞれｒ、Ｒの円である。２円は点Ａで外接し、点Ｂ，Ｃで直線*m*に接している。点Ａにおける２円の共通接線と直線*m*との交点をＤとする。ＰＱ＝１３、ＢＣ＝１２、ｒ＜Ｒのとき、以下の各問いに答えよ。
（１）　ｒ、Ｒの各値を求めよ。
（２）　ＰＤおよびＱＤの長さを求めよ。
（３）　ＡＢおよびＡＣの長さを求めよ。

１９．３つの円Ｐ，Ｑ，Ｒがある。その共通内接線、共通外接線の長さが、円Ｐ，円Ｑの間ではそれぞれ４cm、３０cm；円Q，円Rの間ではそれぞれ６cm、４０cm；円R，円Ｐの間ではそれぞれ１０cm、３６cm であるという。円Ｐ，Ｑ，Ｒの半径はそれぞれいくらか。

２０．半径$\sqrt{2}$ cm の固定された円と半径$2\sqrt{2}$ cm の固定された円が、中心間距離６cm で平面上においてある。この２つの円にベルトをたるませせることなくかける。
（１）　交差型でベルトをかける場合、ベルトの長さはいくらになるか。
（２）　ループ型で外周にベルトをかける場合、ベルトの長さはいくらになるか。

２１．図のように三角形 ABC は円 O に内接している。また、AD は円 O の直径である。AD と BC の交点を E とする。∠AEB＝１２０○、BE＝５cm、EC＝８cm、AE＝１０cm とするとき、次の問いに答えよ。
（１）　三角形 AEC の面積を求めよ。
（２）　円 O の半径を求めよ。
（３）　直線 AC と直線 BD との交点を P とおくとき、三角形 ABP の面積を求めよ。
＜早稲田大系属早稲田シンガポール高改＞

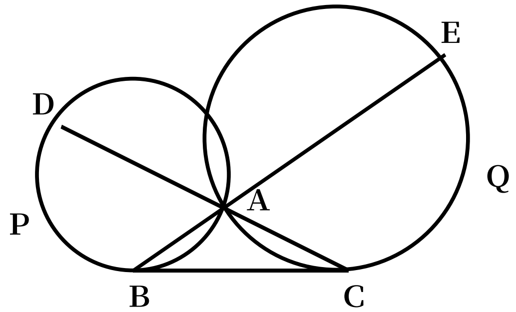


２２．ＡＢ＝２，∠ＡＢＣ＝４５°，∠ＢＡＣ＝１０５°の△ＡＢＣがある。点Ａを通り辺ＢＣに点Ｂで接する円をＰ、点Ａを通り辺ＢＣに点Ｃで接する円をＱとする。さらに、辺ＣＡの延長が円Ｐと交わる点をＤ、辺ＢＡの延長が円Ｑと交わる点をＥとするとき、以下の設問に答えよ。<筑波大付属高>

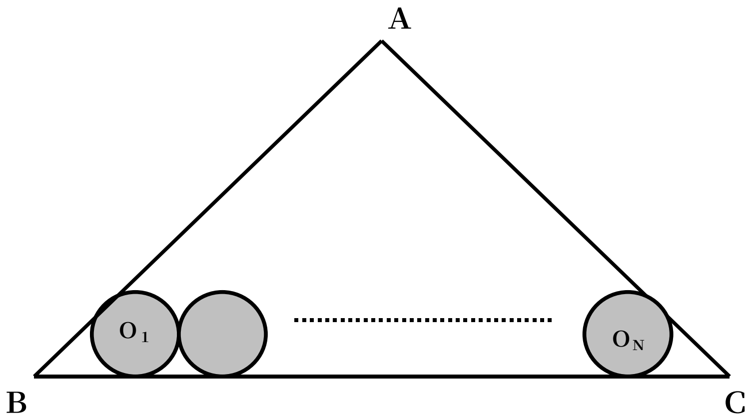
（１）　線分ＣＥの長さを求めよ。

（２）　円Ｐと円Ｑの半径はそれぞれいくらか。

（３）　△ＡＤＥの面積を求めよ。



２３．ＡＢ＝ＡＣの直角二等辺三角形ＡＢＣ内に、図のように半径１の円をＮ個互いに外接させ、辺ＢＣに接し、左端の円O_1は辺ＡＢに、右端の円O_Nは辺ＡＣに接するように描くとき、△AO_1O_NはＮがどんな自然数であれ正三角形にはならないことを証明せよ。



２４．以下の設問に答えよ。

（１）　△ＡＢＣの頂点Ａから対辺ＢＣに下ろした垂線をＡＨとするとき、

$$AB^2-AC^2=BH^2-CH^2$$

となることを証明せよ。

（２）　（１）を用いて、ＡＢ＝ＡＣである二等辺三角形ＡＢＣにおいて、

$$AB^2-BC^2=AB\cdot BC$$

が成り立つとき、頂角∠Ａの大きさを求めよ。

05. Nov. 2005

２５．三角形ＡＢＣの重心をＧとすれば、次式が成立することを証明せよ。

（１）　$AB^2+BC^2+CA^2=3(AG^2+BG^2+CG^2)$

（２）　$AB^2+BC^2=4AG^2+BG^2+CG^2$

（３）　任意の点Ｐに対して、$AP^2+BP^2+CP^2=AG^2+BG^2+CG^2+3PG^2$

２６．次の定理を証明せよ。

（１）　三角形ＡＢＣの辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢに任意の点Ｐから垂線を引き、その足をＤ，Ｅ，Ｆとすれば、$AF^2+BD^2+CE^2=FB^2+DC^2+EA^2$が成り立つ。

（２）　また逆に、三角形ＡＢＣの辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢ上の点をそれぞれＤ，Ｅ，Ｆとするとき、$AF^2+BD^2+CE^2=FB^2+DC^2+EA^2$ならば、Ｄ，Ｅ，Ｆにおける各辺の垂線は１点で交わる。

２７．２弦ＡＢ，ＣＤが半径ｒの円Ｏ内の点Ｐで直交するとき、次式が成立することを証明せよ。

（１）　$AP^2+BP^2+CP^2+DP^2=4r^2$

（２）　$AB^2+CD^2=8r^2-4OP^2$

２８．四角形ＡＢＣＤと同じ平面上の任意の点をＰとするとき、つねに

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$$

が成立するという。この四角形はどんな形状か、論ぜよ。

２９．以下の各問に答えよ。

（１）　三角形ＡＢＣの辺ＢＣの中点をＭとすると、$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$が成り立つことを証明せよ。（パップスの中線定理）

（２）　鋭角三角形ＡＢＣの辺ＢＣ上に点Ｐをとり、$AB^2+AC^2=2(AP^2+BP^2)$が成り立つようにしたい。このような点Ｐは辺ＢＣの中点以外にあるかどうか論ぜよ。

（３）　三角形ＡＢＣの辺ＢＣをｍ：ｎに内分する点をＰとすれば、以下の式が成立することを証明せよ。（スチュアートの定理）

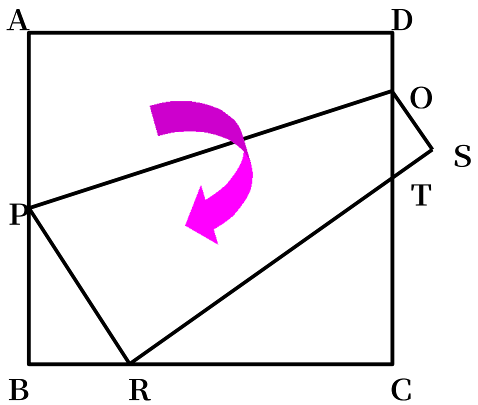
$$n\,AB^2+m\,AC^2=(n+m)\,AP^2+\frac{mn}{m+n}BC^2$$

３０．正五角形ＡＢＣＤＥの内部に、５本の対角線によって囲まれる正五角形を作るとき、この小正五角形の面積は、もとの正五角形の面積の何倍になるか。

３１．一辺が$6+6\sqrt{3}$の正三角形ＡＢＣを、その重心Ｇのまわりに３０°回転したものを△ＤＥＦとするとき、△ＡＢＣと△ＤＥＦの重なり合っている部分の面積を求めよ。
＜開成高＞

３２．半径Ｒの円に内接する正八角形ＡＢＣＤＥＦＧＨについて次の問いに答えよ。
（１） この正八角形の面積を求めよ。
（２） この正八角形の対角線ＡＤと対角線ＢＧの交点をＰ，対角線ＡＤと対角線ＣＦの交点をＱ，対角線ＥＨと対角線ＣＦの交点をＲ，対角線ＥＨと対角線ＢＧの交点をＳとするとき、四角形ＰＱＲＳの面積を求めよ。
（３） 線分ＡＰ，ＢＰおよび弧ＡＢで囲まれる図形の面積を求めよ。

３３．一辺の長さ１の正方形ＡＢＣＤを、図のように辺ＡＢ上の点Ｐと辺ＣＤ上の点Ｑを通る直線ＰＱで折り曲げて、頂点Ａが辺ＢＣ上の点Ｒに移るようにする。このとき、頂点Ｄは正方形ＡＢＣＤの外側の点Ｓに移る。線分ＲＳと辺ＣＤとの交点をＴとする。ＢＲ＝ｘとおいたとき、ＡＰ，ＣＴ，ＳＴ，ＱＴ，ＤＱの各長さをｘの関数として表せ。



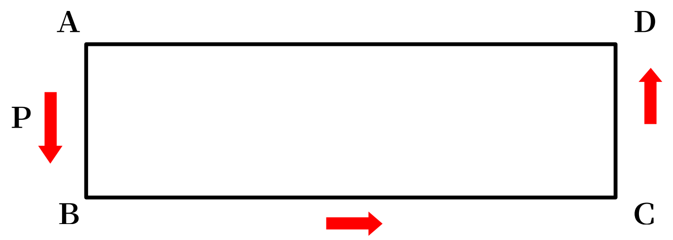
３４．ＡＢ＝ＣＤ＝１，ＢＣ＝ＤＡ＝２の長方形ＡＢＣＤにおいて、線分ＡＢ上にＢＰ＝ｘ（但し$0 \leq x \leq 1$）なる点Ｐをとる。以下の設問に答えよ。
（１） 線分ＰＤによって△ＡＰＤを折り返したら、頂点Ａは辺ＢＣ上に移ったという。このときのｘの値を求めよ。
（２） ｘが（１）の値より小さいとき、線分ＰＤによって△ＡＰＤを折り返したら、点Ａは点Ｑに移り、直線ＰＱと直線ＤＱは辺ＢＣとそれぞれ点Ｒおよび点Ｓで交わる。ＢＲおよびＢＳの長さをｘで表せ。

３５．図のような、ＡＢ＝６ｃｍ、ＡＤ＝１８ｃｍの長方形の紙ＡＢＣＤがある。点Ｐは
Ａを出発して、長方形の辺上をＢ，Ｃを通ってＤまで毎秒１ｃｍの速さで動く。この長方形の紙ＡＢＣＤを点Ａが点Ｐに重なるように折ったとき、二重になる部分について考える。以下の設問に答えよ。<筑波大付属駒場高>

（１） 二重になる部分が初めて三角形になるのは、ＰがＡを出発してから何秒後か。

（２） 二重になる部分が正三角形になるのは、ＰがＡを出発してから何秒後か。

（３） ＰがＣＤの中点であるとき、二重になる部分の最も短い辺の長さを求めよ。



３６．一辺ａの正方形ＡＢＣＤの辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＤの中点をそれぞれＥ，Ｆ，Ｇとし、Ａと線分ＥＦの中点Ｍとを結ぶ直線が辺ＢＣと交わる点をＴとする。

（１）ＧＭの長さを求めよ。

（２）∠ＴＡＧの大きさを求めよ。

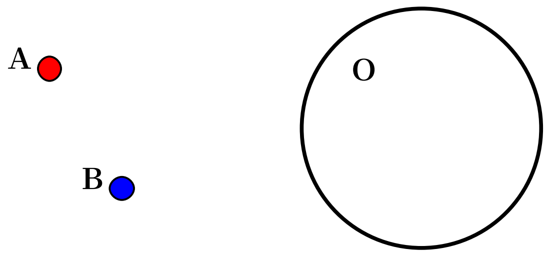
（３）四角形ＡＴＣＧの面積を求めよ。

３７．次の問いに答えよ。

（１） $b^2-4c>0$を満たす長さbおよびcの２つの線分が与えられたとき、xに関する二次方程式$x^2-bx+c=0$の２つの相異なる解を同時に作図する方法を述べよ。

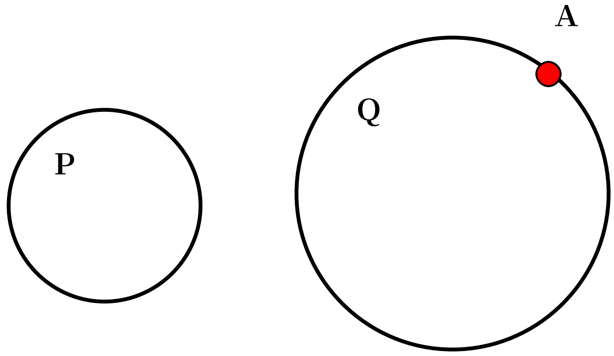
（２） （１）を参考に、与えられた三角形ＡＢＣの周と面積を同時に２等分する直線を作図せよ。

３８．円Ｏの外側に異なる２点Ａ、Ｂがある。２点Ａ、Ｂを通って円Ｏに接する円を作図によって求めよ。



05. Nov. 2005

３９．図のように２円Ｐ，Ｑ があり、円Ｐの周上に点Ａがある。点Ａで円Ｐに接し円Ｑにも接する円の中心を作図によって求めよ。



４０．q＞０とする。座標平面上に点Ａ（q，０）と直線m：ｙ＝－qがある。いま点Ｐ（ｘ，ｙ）をとり、線分ＰＡの長さが点Ｐから直線mに下ろした垂線の長さに等しいとき、ｘ，ｙの関係を出来るだけ簡単な式で表せ。

４１．a＞２c＞０とする。以下の設問に答えよ。

（１） 平面上の２点Ｑ（－c，０）およびＲ（c，０）からの距離の和ＰＱ＋ＰＲが一定となる点Ｐの軌跡の方程式を求めよ。

（２） また２点Ｑ，Ｒを通る直線すなわちｘ軸に垂直な直線で、点Ｐが（１）で求めた軌跡のどの位置にいようが、点Ｐからこの直線への垂線の長さが線分ＰＲの長さの定数（この値を離心率と呼ぶ）倍になるものが存在する（この直線を準線と呼ぶ）ことを証明し、離心率と準線の方程式を求めよ。

（補足説明）

３８．の軌跡は**放物線**と呼ばれる。点Ａは**焦点**、直線mは**準線**と呼ばれる。

３９．の軌跡は**楕円**と呼ばれる。また２点Ｑ，Ｒは**焦点**と呼ばれる。

円、楕円、放物線、双曲線は**二次形式**：$Ax^2+2Hxy+By^2+Cx+Dy+E=0$で表現できる**二次曲線群**と呼ばれる。**二次曲線は準線と離心率を用いれば統一的に定義できる**。紀元前のギリシャ黄金期にメネクムスやアポロニウスはこれらの４つの曲線が円錐を平面で切断したときの切り口の図形になるということを証明した。そこで**円錐曲線**とも呼ばれる。

古典力学における**二体問題**、すなわち２質点（ないし完全球状剛体）間の万有引力のみが作用する場においては、両物体の相対運動の解（軌跡）がこの円錐曲線（二次曲線）になることが証明できる。ケプラーはこの事実を観測によって予言し、ニュートンが理論的に解明した。軌道の持つ力学的エネルギー（運動エネルギーと位置エネルギーの和）の大きさによって、軌道パターンが円から楕円、放物線、双曲線へと相転移していく。地球の太陽周りの運動や人工衛星の地球回りの運動は、他惑星の引力の影響が小さいと近似できるのでほぼ二体問題と扱ってよい。例えば地球は太陽を焦点とする楕円軌道をほぼ廻っている。

４２．$a^2+b^2=c^2$；$a>0, b>0, c>0$ を満たす３つの整数の組（a，b，c）をピタゴラス数と呼ぶ。このピタゴラス数に関して以下の設問に答えよ。＜武蔵高改＞

（１）$t=\frac{b+c}{a}$ とおいて、b，c を a，t を用いて表せ。

（２）（１）の結果を踏まえ、t を２から１０までの整数として、ピタゴラス数を作れ。

（３）a，b，c が互いに素であるとき、この３数の積 abc は６０の倍数であることを証明せよ。

上級レベル

４３．正多角形および円周率算出におけるアルキメデスの手法に関する次の設問に答えよ。

（１）　半径 R の円に内接する正 n 角形の一辺の長さを A_n、正 n 角形の２倍の辺数を持つ正２n 角形の一辺の長さを A_{2n} とするとき、A_{2n} を A_n と R を用いて表せ。

（２）　半径 R の円に内接する正 n 角形の一辺の長さを A_n、半径 R の円に外接する正 n 角形の一辺の長さを B_n とするとき、B_n を A_n と R を用いて表せ。

（３）　$n=3$，4，5，6，8，10，12，16 における A_n および B_n の値を求めよ。

（４）　円周率が３．０５より大きく３．２５より小さいことを証明せよ。

４４．四角形ＡＢＣＤにおいて、ＡＢ＝$3/2$、ＢＣ＝２、ＣＤ＝$12/5$、ＤＡ＝$7/10$、ＡＣ＝$5/2$ である。対角線ＡＣ，ＢＤの交点をＯとするとき、ＯＡ，ＯＢ，ＯＣ，ＯＤの長さを求めよ。＜東京大＞

４５．平面上の点Ｏを中心とする半径１の円周上に点Ｐをとり、円の内部または周上に２点Ｑ，Ｒを、△ＰＱＲの一辺の長さが $2/\sqrt{3}$ の正三角形になるようにとる。このときＯＱ^2＋ＯＲ^2 の最大値と最小値を求めよ。＜東京大＞

４６．放物線 $y=x^2$ 上の３点Ｐ，Ｑ，Ｒが次の条件を満たしている。

「△ＰＱＲは一辺の長さがａの正三角形であり、点Ｐ，Ｑを通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。」

このときａの値を求めよ。＜東京大＞

（解法の方針：中学生がこの問題を解く場合、ＰＱの中点Ｍの座標を利用してＰ，Ｑの座標をａの関数として求め、ＲがＰＱの垂直２等分線上にあって、ＭＲ＝$\sqrt{3}a/2$ であることと、Ｒが放物線 $y=x^2$ 上の点であることから、ａの値を決定すればよい。）