30. Nov. 2005

中学３年
「（原点を頂点、ｙ軸を対称軸に持つ）二次関数」　演習問題

基礎レベル

１．　二次関数$y = ax^2$において、ｘの値がｘ$_1$からｘ$_2$に変化したときの変化の割合は$a(x_1 + x_2)$で与えられることを証明せよ。

２．　ある振り子の長さは、この振り子の周期の２乗に比例するという。振り子の長さが１６ｍのとき周期は８秒であった。周期を１２秒にするには振り子の長さを何ｍにすればよいか。

３．　高いところから物を自然に落とすとき、ｘ秒後までに落ちる距離をｙ (m)とすると、$y = 5x^2$という関係がある。＜東海高＞

（１）　落ち始めてから１５(m)落ちたとする。さらに１５(m)落ちるのに何秒かかるか。

（２）　落ち始めてからのｂ秒間の平均の速さに比べて、落ち始めてｔ秒後からのｂ秒間の平均の速さは４倍になるという。ｔをｂの式で表せ。

４．　以下の各設問に答えよ。

（１）　$y = 3x^2$において、ｘが－１からｍまで増加するときの変化の割合が１２に等しいという。ｍの値を求めよ。

（２）　２つの関数$y = -x^2/2$と$y = ax + 3$は、ｘの値がー１から５まで変化するときの変化の割合が同じであるという。このときａの値を求めよ。

（３）　$y = ax^2$のグラフは２点（２，－２），（－８，ｂ）を通るという。ａ，ｂの値を求めよ。

（４）　二次関数$y = ax^2$において、ｘの変域が$-3 \le x \le 4$であるとき、ｙの値域が$b \le y \le 80$になるという。ａ，ｂの値を求めよ。

（５）　二次関数$y = ax^2$において、ｘの変域が$-2 \le x \le 4$であるとき、ｙの値域が$-8 \le y \le b$になるという。ａ，ｂの値を求めよ。

（６）　２つの関数$y = -3x + 2$と$y = x^2/2$において、ｘの変域がともに$a \le x \le b$のとき、ｙの変域はそれぞれ$-1 \le y \le 8$，$c \le y \le d$であるという。ａ，ｂ，ｃ，ｄの値を求めよ。

５．　座標平面上で放物線$y=x^2$と直線ｙ＝ｘ＋６の２つの交点のうち、ｘ座標の値が大きいほうを点Ａ、小さい方を点Ｂとする。原点をＯとする。＜滝高＞

（１）△ＯＡＢの面積を求めよ。

（２）放物線$y=x^2$上に点Ｐをとり、△ＰＡＢの面積と△ＯＡＢの面積が等しくなるようにした。このとき点Ｐの座標を全て求めよ。

（３）ｘ軸上に点Ｑをとり、折れ線ＡＱとＱＢの長さの和が最小になるように、点Ｑの座標を定めよ。

６．　座標平面上に放物線$y=x^2$がある。点Ｐはｘ軸上を毎秒１の速さで、原点Ｏから負の方向に動き、点Ｑはｙ軸上を毎秒２の速さで、原点Ｏから正の方向に動くものとする。また点Ｐを通りｙ軸に平行な直線と放物線との交点をＲとするとき、次の問いに答えよ。＜明大明治高＞

（１）点Ｑが出発して４秒後に点Ｐが出発するとき、△ＰＱＲが初めて直角三角形になるときの点Ｒの座標を求めよ。

（２）２点Ｐ，Ｑが同時に出発するとき、点Ｒを通り、△ＰＱＲの面積を２等分する直線が原点Ｏを通るときの点Ｒの座標を求めよ。

７．　次の問いに答えよ。

（１）ｙはx^2に反比例し、ｘ＝４のときｙ＝１になるという。このとき、ｙをｘの式で表せ。

（２）（１）で求めた関数と二次関数$y=x^2$との交点をＡ，Ｂとするとき、Ａ，Ｂの座標を求めよ。（但し、Ａのｘ座標を正とする。）

（３）点Ａと（－４，０）を通る直線が放物線$y=x^2$と交わる点をＣ（ＣはＡと異なる点とする）、ｙ軸と交わる点をＤとするとき、ＡＤ：ＤＣを求めよ。

８．　点Ｏは座標の原点、点Ｐは放物線$y=x^2/2$上の動点であり、点Ｑは線分ＯＰ上の点でＯＱ：ＱＰ＝１：２とする。点Ｑからｘ軸への垂線の足をＨとし、線分ＱＨと放物線$y=x^2/2$との交点をＬとする。以下の設問に答えよ。

（１）点Ｐが放物線$y=x^2/2$上を動くとき、点Ｑはどのような図形を動くか、その方程式を求めよ。

（２）ＱＬ：ＬＨの比はＰの位置によらず一定であることを示し、比の値を求めよ。

（３）△ＯＬＨが直角二等辺三角形になるときの点Ｐの座標を求めよ。

中級レベル

９．　座標の原点をＯとする。放物線 $y=x^2$ のグラフ上に３点Ａ，Ｂ，Ｃがあり、３直線ＯＡ，ＡＢ，ＢＣの傾きはそれぞれ１，－１，２である。<土佐高>

（１）四角形ＯＡＣＢの面積を求めよ。

（２）四角形ＯＡＣＢの面積をｘ軸に平行な直線ｙ＝ｋで２等分するとき、ｋの値を求めよ。

１０．　二次関数 $y=mx^2\ (m\neq 0)$ のグラフ上に３点Ａ，Ｂ，Ｃがあり、Ａ，Ｂのｘ座標はそれぞれ－６，４で、直線ＡＢの傾きは $-1/2$ である。また直線ＢＣは点（－４，０）を通る。以下の設問に答えよ。<筑波大付属駒場高>

（１）ｍの値を求めよ。

（２）△ＡＢＣの面積を求めよ。

（３）この二次関数のグラフ上にＡ，Ｂ，Ｃ以外の点Ｐをとって、Ａ，Ｂ，Ｃのうちの２点とＰとで三角形を作ったとき、その面積が△ＡＢＣの面積と等しくなるようなＰはいくつあるか。

（４）（３）であげたＰのうちで、ｘ座標が最も大きいものの座標を求めよ。

１１．　放物線 $y=2x^2$ と直線 $y=3x+5$ との交点をＡ，Ｂ（ただしＡのｙ座標はＢのｙ座標より小さい）とするとき、次の問いに答えなさい。Ｏは座標の原点とする。

（１）点Ａ，Ｂの座標を求めよ。

（２）放物線上にＡ，Ｂと異なる点Ｐをとり、△ＰＡＢの面積が△ＯＡＢの面積の半分となるようにしたい。考え得る点Ｐの座標を全て求めよ。

１２．　直線 k は点Ａ（－３，０）を通り、放物線 $y=mx^2\ (m>0)$ と２点Ｂ，Ｃで交わっている。Ｂのｘ座標は負とであり、Ｃのｙ座標は４で、ＡＢ：ＢＣ＝１：３である。このとき次の問いに答えよ。<ラサール高>

（１）ｍの値を求めよ。

（２）直線 k の方程式を求めよ。

（３）点Ｐをｘ軸上にとり∠ＢＰＣを直角となるようにする。点Ｐのｘ座標を求めよ。

１３．　関数 $y=x^2$ のグラフと点Ａ（１，７）を通る傾きｍの直線が２点Ｐ，Ｑで交わり、Ｐ，Ｑのｘ座標はいずれも整数である。以下の設問に答えよ。<開成高>

（１）このようなｍの値を全て求めよ。

（２）線分ＰＱの長さの最小値を求めよ。

１４．　放物線$y=x^2$と直線$y=x+a$が２点A，Bで交わっており、Aのｘ座標は－３であるという。またこの放物線$y=x^2$上に点D、直線$y=x+a$上に点Cをとり、線分CDは常にｙ軸に平行になるように連動して動くものとする。次の問いに答えよ。

（１）　ａの値と点Bの座標を求めよ。

（２）　Dのｘ座標が$-3 \leq x \leq 4$の範囲にあるとき、△ABDの面積の最大値とそのときのDの座標を求めよ。

（３）　△ABDの面積が７のとき、点Dの座標を求めよ。

（４）　△ACDと△BCDの面積の比が２：１であるとき、点Dの座標を求めよ。

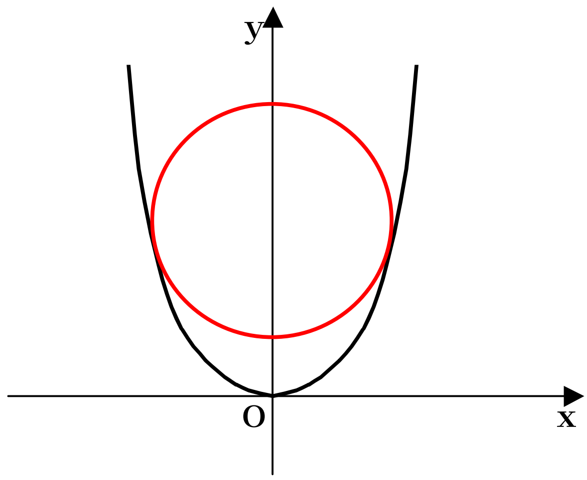
１５．　座標平面上に二次関数$y=x^2/2$—①と直線$y=2x+k$—②がある。以下の設問に答えよ。

（１）　①と②が接するときのｋの値を求めよ。

（２）　①と②が相異なる２点で交わるとき、その２点が作る線分の中点は、ｋの値を変化させるとどのような図形の上を動くか、その図形の方程式を求めよ。

（３）　①と②が相異なる２点A，Bで交わり、AB間の距離が$8\sqrt{5}$のときのｋの値を求めよ。

１６．　図のように座標平面上で半径１の円を放物線$y=x^2$のグラフに２点で内接させる。このとき、円の中心の座標を求めよ。



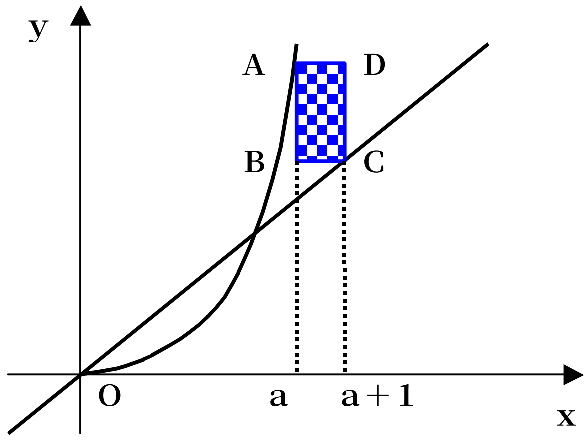
１７．　放物線$y=x^2$上に異なる２点P，Qをとり、また放物線$y=x^2$上に異なる２点R，Sをとる。点Pのｘ座標が１、点Rのｘ座標が４のとき、４点P，Q，R，Sをこの順に結んで出来る四角形PQRSが平行四辺形となるように、他の２点Q，Sの座標を定めよ。

１８． 図において、点Aは$y=x^2$上にあり、そのｘ座標は$a\ (a\geq 2)$である。また点Cは$y=x$上にあり、そのｘ座標は$a+1$である。長方形ＡＢＣＤを図のように作るとき、以下の設問に答えよ。

（１） 点Aが$y=x^2$上を$2\leq a\leq 4$の範囲で動くとき、点Dの軌跡の方程式と移動距離を求めよ。

（２） 長方形ＡＢＣＤがＡＢ：ＡＤ＝１：２となるときのａの値を求めよ。

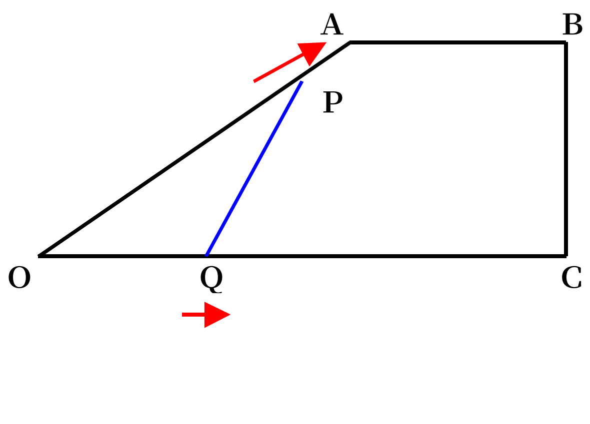
（３） $a=2$のとき、直線$y=x/2+k$がこの長方形ＡＢＣＤの面積を２等分するようなｋの値を求めよ。



１９． ＯＡ＝５，ＡＢ＝３，ＢＣ＝３でＡＢ//ＯＣ，ＡＢ⊥ＢＣの台形ＯＡＢＣにおいて、２点Ｐ，Ｑは同時にＯを出発し、それぞれＯ－Ａ－Ｂ－Ｃ，ＯＣ上を毎秒２cm，１cmの速さで進み、点ＰがＣに到着すると、両点とも停止するものとする。点Ｏを出発してからｘ秒後の△ＯＰＱの面積をｙcm^{2}として、次の問いに答えよ。

（１） ｙをｘの式で表し、グラフに書け。

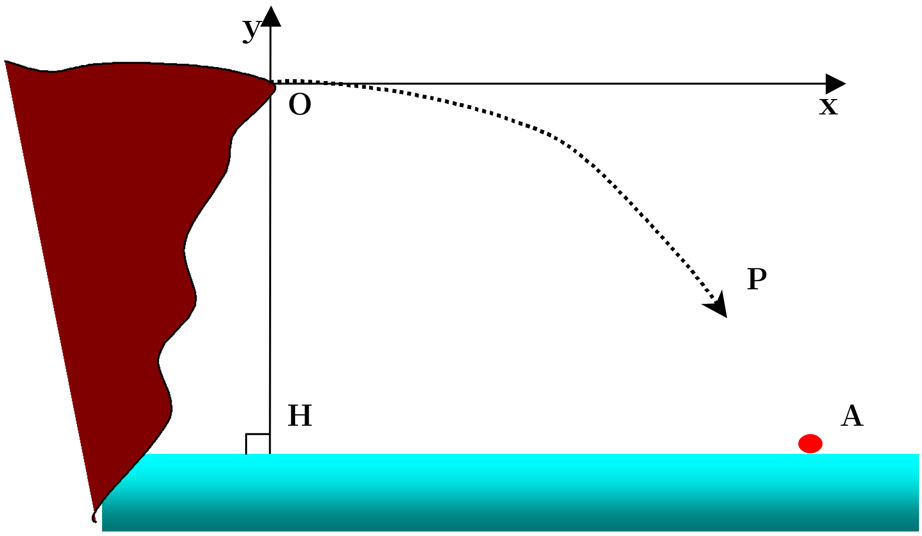
（２） △ＯＰＱの面積が台形ＯＡＢＣの１／５になるのは出発してから何秒後か。



２０．　崖の上の点Ｏから水平に投げられた物体Ｐのｔ秒後の位置は、Ｏを原点、投げた方向をｘ軸、垂直上方をｙ軸とする座標で表すと、Ｐ（ｘ，ｙ）のとき、重力のみを考慮し、空気抵抗や風そのほかの影響を無視した理想状態では、$x = vt,\ y = -4.9t^2$ となる。ただし、ｖは初速（m／秒）であり、海面までの高さＯＨ＝４０ｍとする。ｘｙ座標の１目盛りは１ｍである。以下の設問に答えよ。

（１）　Ｐが海面に落下するのは何秒後か。

（２）　Ｐが海面上に落下した地点Ａと地点Ｏの距離が５０ｍ のとき、初速ｖおよび点Ｐの描く図形の方程式を求めよ。



２１．　電車Ｐは、Ａ地点を出発してから次第に速度を増していき、３０秒後に秒速２０ｍでＢ地点を通過し、その後はこの速さを保ちながら走り続けた。電車ＰがＡ地点を出発してからｘ秒間に進んだ距離をｙ(m)とすると、$0 \leq x \leq 30$ のときｙはｘの２乗に比例するという。またこの電車の線路に沿った道路を走っている自動車Ｑは、電車ＰがＡ地点を出発するしばらく前に秒速１０ｍでＡ地点を通過した。自動車Ｑはその後もこの速さを保ちながら走り続け、Ｂ地点を通過してから１分４０秒後にＡ地点から 1,300m離れたＣ地点で電車Ｐに追い抜かれた。自動車や電車の長さは無視するものとして、以下の設問に答えよ。＜筑波大付属高＞

（１）　$0 \leq x \leq 30$ のとき、ｙをｘの式で表せ。

（２）　電車ＰがＡ地点を出発したとき、自動車ＱはＡ地点の前方何mにいるか。

（３）　電車Ｐが速度を増しているときに、電車Ｐと自動車Ｑとの距離が 575mとなるのは、電車ＰがＡ地点を出発してから何秒後か。

２２．　放物線 $y = -x^2$ 上に点Ａ、直線 $y = x/2$ 上に点Ｂ、ｙ軸上に点Ｃをとり、△ＡＢＣが正三角形になるようにしたい。このときのＡ，Ｂ，Ｃの座標を求めよ。＜洛星高＞

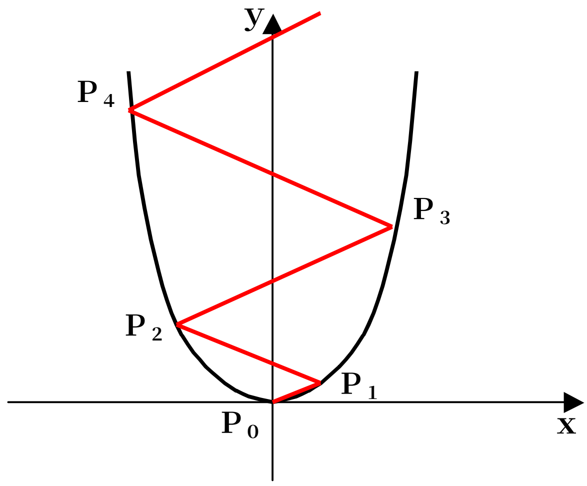
２３．　放物線$y=x^2$がある。（この放物線をＣと呼ぶことにする。）$P_0(0,\ 0)$を通り傾き$1/2$の直線がＣと交わる点をP_1，P_1を通り傾き$-1/2$の直線がＣと交わる点をP_2，P_2を通り傾き$1/2$の直線がＣと交わる点をP_3，－－－－－－－というように、直線の傾きを$1/2$，$-1/2$，$1/2$，$-1/2$，－－－－－－－と交互に変えて、点P_1，P_2，P_3，P_4，－－－－－－－をとる。以下の設問に答えよ。＜武蔵高＞

（１）　P_3，P_4の座標をそれぞれ求めよ。

（２）　折れ線$P_0P_1P_2P_3P_4$の長さを求めよ。

（３）　P_{40}の座標を求めよ。また折れ線$P_0P_1P_2$－－－$P_{39}P_{40}$の長さを求めよ。

（４）　P_nの座標を求めよ。また折れ線$P_0P_1P_2$－－－$P_{n-1}P_n$の長さを求めよ。（ｎの偶奇によって場合分けせよ。）



２４．　$y=x^2$のグラフと直線$y=x+n\ (n>0)$の交点を図のようにA，Bとし、この直線とｘ軸、ｙ軸との交点をそれぞれC，Dとする。原点をＯとする。＜学芸大付属高＞

（１）　ｎ＝１２のとき、△ＯＡＣと△ＯＡＢの面積比を求めよ。

（２）　△ＯＡＣ＝△ＯＡＤのとき、ｎの値を求めよ。

（３）　面積比が△ＯＢＤ：△ＯＡＤ＝５：３のとき、点Ａの座標を求めよ。

２５．　傾きが０ではない平行な２直線を放物線$y=mx^2\ (m>0)$と２点で交わるようにどのように引いても、４つの交点によってできる台形が等脚台形とはならないことを証明せよ。＜S&J 塾作成問題＞

２６．　放物線上にとった任意の４つの点を結んで出来る四角形は平行四辺形にはならないことを証明せよ。＜S&J 塾作成問題＞

２７． 放物線 $y = mx^2$ $(m > 0)$ ―①，直線 $y = x - m$ ―②，直線 $y = x - n$ ―③があり、①と②は点Ｃで接し、①と③は２点Ａ，Ｂで交わっている。またＡＣ⊥ＢＣである。このとき、ｍおよびｎの値とＣの座標を求めよ。

（解法の方針：２直線が直交するとき傾きの積が－１になること、および２次方程式の解と係数の関係（ホームページ別項：「二次方程式とその応用」の解法のポイントを参照せよ）を用いれば、Ａ，Ｂの座標を求めずにｎの値を計算できる。）

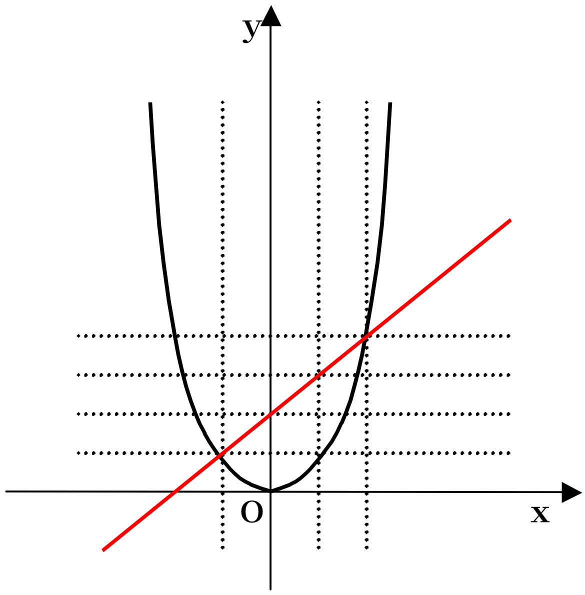
２８． 座標平面上に点Ａ（－１，１）と関数 $y = x^2$ のグラフがある。ｎを正の整数として点Ｐ（ｎ，ｎ²）をとる。直線ＡＰと $y = x^2$ のグラフで囲まれる範囲内（周上を含む）にあるｘ座標、ｙ座標がともに整数である点（格子点）の個数を N (n) とおく。例えば N (2) = 8 である。以下の設問に答えよ。＜学芸大付属高改＞

（１） N (3)，N (4) の値を求めよ。

（２） N (10)－N (9) の値を求めよ。

（３） N (n) をｎの式で表せ。

（解法の方針：体系的には高校数学の数列で学ぶが、格子点の個数を数える問題では、例えばｘ＝ｋにおける格子点の個数をｋの式で表し、それを全てのｋに対して総和計算するという方法が望ましい。また本問（３）では、N (n)－N (n-1) をｎの式で表してから N (n) を求めてみよ。）



２９． 放物線 $y = x^2$ ―①と直線 $y = kx + 3 - 4k$ ―②について以下の設問に答えよ。

（１） 直線②はｋがどのような値でも定点を通る。この定点の座標を求めよ。

（２） ｘについての二次方程式 $x^2 - kx + 4k - 3 = 0$ の一つの解 x_1 は、$1 \leq x_1 \leq 2$ を満たすという。このときｋの値の範囲と他の解 x_2 の範囲をグラフを用いて求めよ。

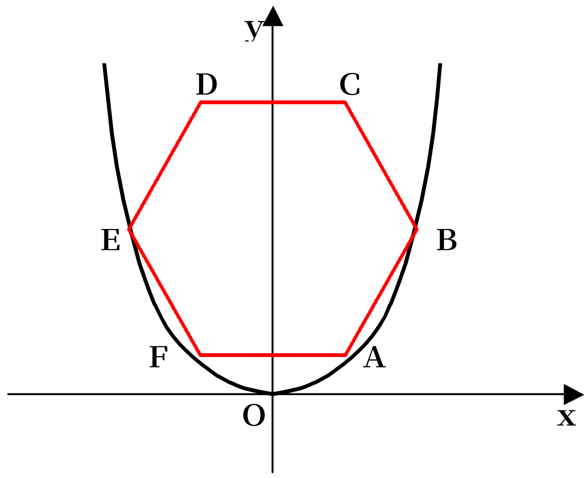
３０．　図のように放物線$y=ax^2$上に４点をのせた１辺２の正六角形ＡＢＣＤＥＦがある。(辺ＡＦはｘ軸に平行とする。)＜大阪星光＞

（１）　ａの値を求めよ。

（２）　２点Ａ，Ｅを通る直線の式を求めよ。

（３）　直線$y=m(x+2)-1$が正六角形ＡＢＣＤＥＦの面積を２等分するときのmの値を求めよ。

（４）　直線$y=m(x+2)-1$が四角形ＢＣＤＥの面積を２等分するときのmの値を求めよ。



３１．　二次関数$y=mx^2$ $(m\neq 0)$上に、直線ｘ＋ｙ＝１に関して対称な、相異なる二点が存在するような、mの取るべき値の範囲を求めよ。またそのときの二点の座標を、mを用いて表せ。＜S&J 塾作成問題＞

上級レベル

３２．　放物線$y=x^2$上の３点Ｐ，Ｑ，Ｒが次の条件を満たしている。

「△ＰＱＲは一辺の長さがａの正三角形であり、点Ｐ，Ｑを通る直線の傾きは$\sqrt{2}$である。」

このときａの値を求めよ。＜東京大＞

（解法の方針：中学生がこの問題を解く場合、ＰＱの中点Mの座標を利用してＰ，Ｑの座標をａの関数として求め、ＲがＰＱの垂直２等分線上にあって、ＭＲ＝$\sqrt{3}a/2$であることと、Ｒが放物線$y=x^2$上の点であることから、ａの値を決定すればよい。）

３３．　放物線の幾何学的性質に関する次の設問に答えよ。

（1）　定点Ｆ（０，ｐ）と定直線ｄ：ｙ＝－ｐに至る距離の等しい点の軌跡の方程式は二次関数になることを示し、その方程式を求めよ。(この定点Ｆを焦点、定直線ｄを準線と呼び、放物線は焦点と準線からの距離が等しい点の軌跡と定義される。)

（2）　（1）で求めた放物線上の任意の点（x_1，y_1）における接線の方程式は、$x_1 x = 2p(y + y_1)$ で与えられることを証明せよ。

（3）　（1）で求めた放物線上の任意の点をＡ、焦点をＦとすれば、Ａを通りｙ軸に平行な直線を直線ＡＹとすると、∠ＦＡＹは点Ａにおける（1）で求めた放物線の法線（接線に垂直な直線）によって２等分されることを証明せよ。(パラボラアンテナの原理)

（4）　放物線の焦点Ｆを通る任意の弦ＰＱの両端から、準線に下ろした垂線をＰＲ，ＱＳとし、ＲＳの中点をＭとすれば、ＲＦ⊥ＳＦ，ＲＦ⊥ＰＭ，ＰＭ⊥ＱＭ，ＰＱ⊥ＭＦが成り立つことを証明せよ。またＰＲ＝ａ，ＱＳ＝ｂのとき、ＭＦの長さをａとｂを用いて表せ。