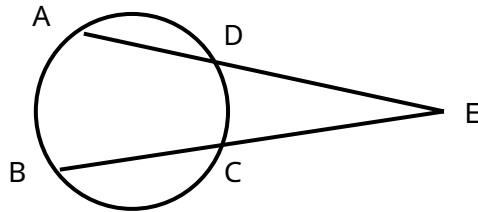


中学3年

「平面図形の相似と面積比および三角形の五心」 演習問題

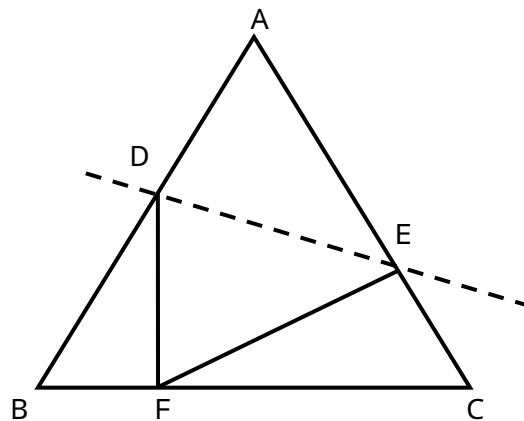
基礎レベル

1. 三角形ABCの線分AB上に点D、線分AC上に点Eをとり、DEとBCを平行とする。DE : BC = 3 : 4とする。BEとCDの交点をFとする。次の問いに答えよ。
 (1) 三角形ADEと四角形DBCEの面積比を求めよ。
 (2) 三角形BFCと三角形ABCの面積比を求めよ。
2. 線分ADとBCが平行で、AD = 3, BC = 7の台形ABCDにおいて、線分AB上に点Eをとり、AE = 3、EB = 2とする。線分CD上にBCとEFが平行になるように点Fをとる。EFの長さ、四角形AEFDと四角形EBCFの面積比を求めよ。
3. 下図でAD = 5、DE = 4、CE = 3、CD = 2のときBCとABの長さを求めよ。



4. 三角形ABCの3辺BC, CA, AB上にそれぞれ点D, E, Fをとり、BD : DC = 1 : 2、CE : EA = 2 : 3、AF : FB = 3 : 4とすると、三角形DEFの面積は三角形ABCの面積の何倍か。
5. 一辺が8 cmの正四面体ABCDの辺AB, AC, CD上にそれぞれ点P, Q, Rをとり、BP = 6 cm、CQ = 3 cm、DR = 5 cmとする。三角形PQRを含む面でのこの正四面体を切断したとき、残された三角錐台の体積は、はじめの正四面体の体積の何倍になるか。
6. 垂直に立っている電柱がある。1.8 mの棒を間に立てて見通したとき、人と棒の間の距離は1.2 m、棒と電柱の間の距離は3.6 m、人の目の高さが0.9 mだった。地平面は水平であるとして、電柱の高さを求めよ。
7. 三角形ABCの中線(頂点と対辺の中点を結ぶ線分)をAMとし、角AMB, 角AMCの2等分線がAB, ACと交わる点をそれぞれD, Eとすれば、DEとBCは平行になることを証明せよ。

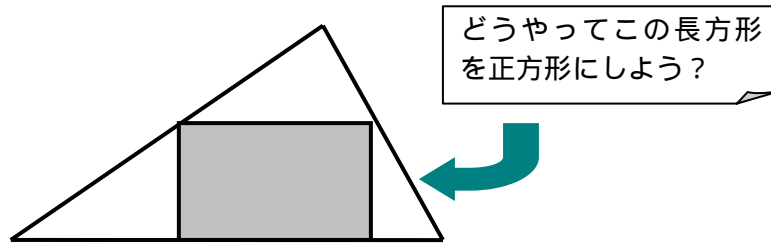
8. 三角形 ABC の辺 AB , AC 上にそれぞれ D , E をとり、 DE と BC が平行になるようにする。 C を通って BE に平行線を引き AB との交点を F とする。 $AB^2 = AD \cdot AF$ となることを証明せよ。
9. 四角形の対辺の中点を結ぶ 2 本の直線と、対角線の中点を直線は、1 点で交わることを証明せよ。
10. 三角形の 3 つの中線のそれぞれと同じ長さを各辺にもつ三角形の面積は、もとの三角形の面積の何倍か。
11. 2 辺の長さが 10 cm と 15 cm の長方形 $ABCD$ の辺 AB , BC , CD , DA の中点をそれぞれ E , F , G , H とするとき、 AG , BH , CE , DF によって作られる四角形 $MNPQ$ の面積を求めよ。
12. 台形の 2 つの平行対辺の長さを 9 cm と 13 cm とする。底辺に平行で面積を 2 等分する直線が、平行でない対辺に挟まれた部分の長さを求めよ。
13. 下図の一辺の長さ 4 cm の正三角形 ABC を、辺 AB 上の点 D と辺 AC 上の点 E を通る直線によって折り曲げたところ、頂点 A が辺 BC 上の点 F に一致した。 BF の長さは 1 cm であった。
 (1) AD 及び AE の長さを求めよ。
 (2) 三角形 DEF の面積は正三角形 ABC の面積の何倍か。



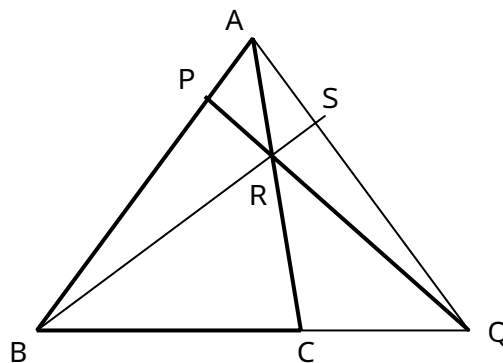
中級レベル

14. 長さ b , c , d の線分が与えられたとき、次式をみたす長さ x の線分を (コンパスと直線を引くための定規だけを用いて) 作図せよ。
 (1) 一次方程式 $bc = dx$
 (2) 二次方程式 $bc = x^2$

15. 3辺の長さが13, 14, 15の三角形を考える。この三角形の面積、内接円の半径、外接円の半径、内心と外心の間の距離を求めよ。
16. 与えられた三角形の一辺上に一边を持つ正方形をこの三角形に内接させよ(作図題)。



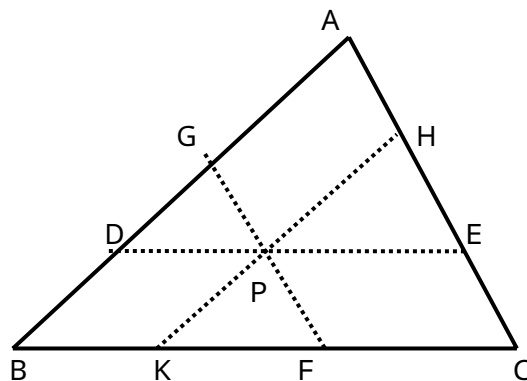
17. $AB = 10$, $BC = 12$, $CA = 8$ の三角形ABCがある。線分BC上にBD : DC = 5 : 4となるように点Dをとり、ADの延長線と三角形ABCの外接円との交点をEとする。次の問いに答えよ。
 (1) 三角形ABDと三角形AECが相似であることを証明せよ。
 (2) AEの長さを求めよ。
18. 三角形ABCの外側に正三角形ABPと正三角形ACQを作り、BQとCPの交点をRとする。
 (1) $PC = BQ$ を証明せよ。
 (2) 三角形PBC : 三角形QBC = RB : RCを証明せよ。
19. 下図で3点P, Q, Rはそれぞれ辺AB, BC, CAまたはその延長線上の点で、 $AP : PB = 1 : 3$ 、 $AR : RC = 2 : 1$ とする。各問いに答えよ。
 (1) PR : RQの値を求めよ。
 (2) BQ : QCの値を求めよ。
 (3) BRの延長線とAQとの交点をSとすると、AS : SQの値を求めよ。



20. 三角形ABCの2辺AB、AC上にそれぞれ点Fと点Eをとり、 $AE = AF$ となるようにする。直線FEと辺BCを含む直線の交点をDとする。 $BD : CD = BF : CE$ を証明せよ。
21. 角Aを直角とする直角三角形ABCの角BおよびCの二等分線の交点(内心)をI、またその二等分線が対辺CA, ABと交わる点をそれぞれD, Eとすると、四角形BCDEと三角形IBCの面積の比を求めよ。

上級レベル

22. 三角形ABCの辺BC, CA, ABのそれぞれの上に、それらを底辺として、両底角がいずれも30度であるような二等辺三角形BDC, CEA, AFBを三角形ABCの外側に書けば、三角形DEFが正三角形になることを証明せよ。
23. 正7角形ABCDEFGにおいて、 $GA = 3/8$ 、 $GB = b$ 、 $GC = c$ とする。辺CDと辺EFの延長線上の交点をPとする。(開成高)
 (1) $CP = CE$ を証明せよ。
 (2) $(1/b) + (1/c)$ の値をもとめよ。
24. 三角形ABCの内心I(各頂角の2等分線の交点)を通り、AIに垂直な直線が2辺AB, ACとそれぞれ点E, Fで交わっている。
 (1) 三角形BICと相似な三角形をすべてあげよ。
 (2) $EF^2 : (BE \cdot CF)$ の比の値を求めよ。
25. 下図のように、三角形ABCの内部にある任意の点Pを通して各辺に平行線を引き、それぞれ他の2辺と交わる点を右図のように、D, E; F, G; H, Kとする。 $(DE/BC) + (FG/CA) + (HK/AB)$ の値がPの位置によらず一定値を取ることを証明し、その値を求めよ。



26. 定円外の定点Aからこの円に接線を引き接点をS, Tとする。Aを通る任意の直線がこの定円と交わる点をPおよびQとし、また弦STと交わる点をRとすれば、 $(1/AP) + (1/AQ) = (2/AR)$ になることを証明せよ。
27. 下図のように、半直線OX, OY, OZがあって、各XOZおよび各ZOYの大きさがともに60度であるとする。これら半直線とそれぞれA, B, Cで交わる直線を引けば、 $(1/OA) + (1/OB) = (1/OC)$ になることを証明せよ。

