

中学3年

「二次方程式の解法とその応用」 解法のポイント

1. 二次方程式の解法

中学生の段階では、ここで述べる解法をマスターすれば、問題を解くことができる。

$$\text{パターン1: } x^2 = q \Rightarrow x = \pm\sqrt{q} \quad (\text{但し、} q \geq 0)$$

$$\text{(例1)} \quad x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$$

$$\text{(例2)} \quad 3x^2 = 7 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} = \pm\frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$\text{パターン2: } (x+p)^2 = q \Rightarrow x+p = \pm\sqrt{q} \Rightarrow x = -p \pm \sqrt{q} \quad (\text{但し、} q \geq 0)$$

$$\text{(例1)} \quad (x+4)^2 = 12 \Rightarrow x+4 = \pm\sqrt{12} \Rightarrow x = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\text{(例2)} \quad 5(x-6)^2 = 18 \Rightarrow (x-6)^2 = \frac{18}{5} \Rightarrow x-6 = \pm\sqrt{\frac{18}{5}} \Rightarrow x = 6 \pm \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{パターン3: 因数分解型} \quad x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta) = 0 \Rightarrow x = -\alpha, -\beta$$

2数の和と積が与えられたとき、すぐその2数が見つけれれば、この型で解ける。

$$\text{(例1)} \quad x^2 - 7x - 18 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-9) = 0 \Rightarrow x = -2, 9$$

$$\text{(例2)} \quad 3x^2 + 33x + 90 = 0 \Rightarrow 3(x^2 + 11x + 30) = 3(x+5)(x+6) = 0 \Rightarrow x = -5, -6$$

$$\text{パターン4: 平方完成してパターン2へ変形する型} \quad (\text{但し、} b^2 - 4c \geq 0)$$

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + bx = -c$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{(例 1)} \quad x^2 + 8x + 8 = 0 &\Rightarrow x^2 + 8x = -8 \Rightarrow \left(x + \frac{8}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 - 8 \\ &\Rightarrow (x + 4)^2 = 4^2 - 8 = 8 \Rightarrow x + 4 = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow x = -4 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 7x - 2 = 0 &\Rightarrow 3x^2 + 7x = 2 \Rightarrow x^2 + \frac{7}{3}x = \frac{2}{3} \\ \text{(例 2)} \Rightarrow \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 &= \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{73}{36} \Rightarrow x + \frac{7}{6} = \pm\sqrt{\frac{73}{36}} = \pm\frac{\sqrt{73}}{6} \\ &\Rightarrow x = -\frac{7}{6} \pm \frac{\sqrt{73}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{73}}{6} \end{aligned}$$

2. 二次方程式の解の公式と判別式

2.1 二次方程式の解の公式

1. のパターン 4 を公式の形で表現したものが二次方程式の解の公式である。

二次方程式の解の公式：1 (但し、 $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$)

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

この公式の導出プロセスは以下ようになる。

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \Rightarrow ax^2 + bx &= -c \\ \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\ \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \Rightarrow x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Rightarrow x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

これを用いれば、二次方程式の解は必ず得ることが出来る。

$$(例) \underline{3x^2 + 7x - 2 = 0} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{73}}{6}$$

xの係数が偶数のときは、公式を変形した次の式を代わりに用いると便利である。

二次方程式の解の公式：2 (但し、 $a \neq 0, b'^2 - ac \geq 0$)

$$ax^2 + 2b'x + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

$$ax^2 + 2b'x + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \text{ より得る。}$$

$$(例) \underline{5x^2 - 8x - 3 = 0} \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 5 \times (-3)}}{5} = \frac{4 \pm \sqrt{31}}{5}$$

2.2 二次方程式の共役解

解の公式から、二次方程式の解の性質について次のことが分かる。

二次方程式の解の共役性

実数係数の二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ (但し、 $a \neq 0, b^2 - 4ac \geq 0$) の一解が $p + \sqrt{q}$ であれば、他解は $p - \sqrt{q}$ で与えられる。このような解の性質を共役性という。

$$(例) \text{二次方程式 } 3x^2 + 7x - 2 = 0 \text{ の2解 } -\frac{7}{6} + \frac{\sqrt{73}}{6} \text{ と } -\frac{7}{6} - \frac{\sqrt{73}}{6} \text{ は互いに共役である。}$$

2.3 二次方程式の判別式

解の公式から、二次方程式の解の性質について次のことが分かる。

二次方程式の解の判別

実数係数の二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ (但し、 $a \neq 0$) の

判別式 $D = b^2 - 4ac$ とすると、解の性質について次の判別が出来る。

- $D = b^2 - 4ac > 0$ のとき： 相異なる2実数解をもつ
- $D = b^2 - 4ac = 0$ のとき： 重解 $x = -\frac{b}{2a}$ をもつ
- $D = b^2 - 4ac < 0$ のとき： 実数解は存在しない(解なし)

(例題) 次の二次方程式 $-x^2 + 6x + 2k - 1 = 0$ が重解を持つように定数 k の値を定め、そのときの重解ももつめよ。

(解1) 重解を持つためには、右辺の2次式が完全平方式にならないといけないので、 $-x^2 + 6x + 2k - 1 = -(x - 3)^2 + 9 + (2k - 1)$ において、 $9 + (2k - 1) = 0$ にならないといけない。従って $k = -4$ で、重解は3となる。

(解2) 重解を持つためには、判別式 $D = 6^2 - 4 \times (-1) \times (2k - 1) = 36 + 4(2k - 1) = 0$ が成立すればよいから、 $k = -4$ で、このとき重解は

$$x = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$$

となる。(判別式を使う便利さが、分かってもらえたと思う。)

高校に入ると、全ての二次方程式に解が存在できるように、すなわち上記の判別式が負の場合でも解が存在できるように、平方根内が負の(二乗して負になる)数: 虚数 $\sqrt{-1} = i$ を新たに導入し、中学までの実数に限定された数の概念に虚数を新たに追加「複素数」という広い数の概念へ拡張する。この複素数の導入によって、

代数学の基本定理

「 n 次の代数方程式の解は重解を重複して数えれば複素数の範囲で必ず n 個の解を持つ」

を証明することが出来る。二次方程式と同様、三次や四次の代数方程式には解の公式(係数から解を算出する計算公式)が存在するが、五次以上の代数方程式には解の公式は存在しないことが、数学者アーベルによって証明されている(この場合も解は必ず存在するが、時によっては解析解を完全に見つけることが出来ず、計算機による近似解のみが得られる)。

3. 二次方程式の解と係数の関係と2次式の因数分解

3.1 二次方程式の解と係数の関係

二次方程式の解と係数の関係

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ (但し、 $a \neq 0$) の2解を α, β とすると、

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

(注) この関係式は、高校での履修範囲であるが、難関校を受験する生徒は内容を理解し4章と併せて使いこなせるようにしておいたほうがよい。

(証明) 解の公式を用いれば簡単に導出できる。

$$\alpha + \beta = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha \cdot \beta = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \times \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

(例) 二次方程式 $3x^2 + 7x - 2 = 0$ の2解の和と積は、解と係数の関係を用いれば、いちいち解を求めることなく、それぞれ $-7/3$ と $-2/3$ であることが分かる。

3.2 2次式の因数分解と二次方程式

「2次式の2つの1次式への因数分解は複素数の範囲で常に可能である」ことを示している次の定理は、非常に本質的で重要である。

2次式の因数分解と二次方程式

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ (但し、 $a \neq 0$) の2解を α, β とすると、2次式 $ax^2 + bx + c$ は次のように因数分解できる。

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - \alpha) \cdot (x - \beta)$$

(証明) 解と係数の関係を用いれば簡単に導出できる。

$$a \cdot (x - \alpha) \cdot (x - \beta) = a \{ x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \} = a \left\{ x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} \right\} = ax^2 + bx + c$$

(注1) 1章のパターン3による解法は、この命題を用いて解の導出を行っているわけである。2つの実数AおよびBの積 $AB = 0$ ならば、AまたはBはかならず0である。

従って実数の範囲で二次方程式の左辺の2次式が因数分解できれば、

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - \alpha) \cdot (x - \beta) = 0 \Rightarrow x - \alpha = 0 \text{ or } x - \beta = 0 \Rightarrow x = \alpha \text{ or } \beta$$

となり解が求まることになる。これが1章のパターン3の解法を説明している。

(注2) お分かりのように、二次方程式の解の導出は「解の公式」が本質であり、その結果から因数分解による解の導出の正当性が証明されるわけである。すべての2次式は、解の公式で得られる2解を用いて因数分解できるわけで、解の公式を用いない因数分解とは、偶然「2数の和と積から2数を言い当てることが出来た」にすぎない。

(例) $3x^2 + 7x - 2 = 3 \left(x - \frac{-7 + \sqrt{73}}{6} \right) \cdot \left(x - \frac{-7 - \sqrt{73}}{6} \right)$ と因数分解できる。

3.3 代数方程式と因数分解の本質

3.2の定理から2次式は1次式の積に因数分解できることが分かる。

3.2でも述べたように、2つの実数AおよびBの積 $AB = 0$ ならば、AまたはBはかならず0である。従って実数の範囲で二次方程式の左辺の2次式が因数分解できれば、

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - \alpha) \cdot (x - \beta) = 0 \Rightarrow x - \alpha = 0 \text{ or } x - \beta = 0 \Rightarrow x = \alpha \text{ or } \beta$$

となり解が求まることになる。

先に述べた複素数に数の範囲を拡張しても、2つの複素数AおよびBの積 $AB = 0$ ならば、(高1で履修する複素数の性質を用いれば) AまたはBはかならず0であることが証明できる。3.2の定理より任意の2次式が複素数の範囲で1次式の積に因数分解可能であるので、その結果として任意の2次方程式が複素数の範囲で2つの解を必ず持つことが証明できるわけである。

このことは実は3次、4次より高次の代数方程式にも論点を拡張でき、高等学校以降で学ぶ代数方程式の解法では、因数分解の意義として代数学の基本定理および因数定理に主眼が置かれる。

4. 基本対称式と2数の対称式に関するニュートンの漸化式

対称式とは、式内の任意の2数を互いに入れ替えても式が恒等的に(常に)成立することである。中学生の段階では、2数の対称式を使いこなせば十分であろう。対称式に関する問題は、因数分解の練習にも適しているので、よく出題される。

2数の基本対称式

2数 α, β の基本対称式は、 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ の2数で与えられる。

基本対称式を用いると次のような対称式の計算が簡単に出来る。

$$s_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 1 + 1 = 2$$

$$s_1 = \alpha^1 + \beta^1 = \alpha + \beta$$

$$s_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta) \cdot s_1 - \alpha\beta \cdot s_0$$

$$s_3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) \cdot s_2 - \alpha\beta \cdot s_1$$

$$s_4 = \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^3 + \beta^3) - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta) \cdot s_3 - \alpha\beta \cdot s_2$$

このような芽づる式に解を求めていく式を「漸化式」という。

ニュートンの漸化式

自然数 n に対し、対称式 $s_n = \alpha^n + \beta^n$ は、基本対称式は $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta$ で構成される次の三項間漸化式を満たす。

$$s_n = (\alpha + \beta) \cdot s_{n-1} - \alpha\beta \cdot s_{n-2}$$

また、次のような対称式も、工夫して基本対称式で表現できる。

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$2\alpha^2 - 7\alpha\beta + 2\beta^2 = 2(\alpha + \beta)^2 - 11\alpha\beta$$

このような変形は練習を積み重ねてマスターしてほしい。

5. 二次方程式の解と次元下げのテクニック

(例題) 二次方程式 $3x^2 + 7x - 2 = 0$ の小さい方の解を w とすると、 w^3 および w^4 を計算せよ。

この様な問題を解くとき、 $3x^2 + 7x - 2 = 0$ の小さい方の解 $w = -(7 + \sqrt{73})/6$ をまともに入力せずに、計算労力を削減して解く方法を説明する。

$$\begin{aligned}
3w^2 + 7w - 2 &= 0 \Rightarrow 3w^2 = -7w + 2 \\
\Rightarrow w^2 &= -\frac{7}{3}w + \frac{2}{3} \\
\Rightarrow w^3 &= w^2 \cdot w = \left(-\frac{7}{3}w + \frac{2}{3}\right) \cdot w = -\frac{7}{3}w^2 + \frac{2}{3}w = -\frac{7}{3}\left(-\frac{7}{3}w + \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}w \\
&= \frac{55}{9}w - \frac{14}{9} = \frac{55}{9} \cdot \left(\frac{-7 - \sqrt{73}}{6}\right) - \frac{14}{9} = \frac{-469 - 55\sqrt{73}}{54} \\
\Rightarrow w^3 &= w^2 \cdot w^2 = \left(-\frac{7}{3}w + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{49w^2 - 28w + 4}{9} = \frac{49}{9}\left(-\frac{7}{3}w + \frac{2}{3}\right) - \frac{28}{9}w + \frac{4}{9} \\
&= -\frac{427}{27}w + \frac{110}{27} = -\frac{427}{27} \cdot \left(\frac{-7 - \sqrt{73}}{6}\right) + \frac{110}{27} = \frac{3649 + 427\sqrt{73}}{162}
\end{aligned}$$

次数を一つずつ下げていくことで、最終的に1次式に戻してから解を代入したほうが、特に根号を含む解の場合は正確かつ早く計算できる。このテクニックは高校でもよく使う便利な方法なので、マスターしてほしい。

6. 二次方程式を用いる例題

(例題1) 2次方程式 $2x^2 + 12x + a = 0$ の一解が $x = -3 + \sqrt{5}$ のとき、 a の値と他解を求めよ。

(解1) 中学生の場合、ふつう以下のように解答すると思う。

$$2(-3 + \sqrt{5})^2 + 12(-3 + \sqrt{5}) + a = (28 - 12\sqrt{5}) + (-36 + 12\sqrt{5}) + a = -8 + a = 0 \Rightarrow a = 8$$

このとき、 $2x^2 + 12x + 8 = 2(x^2 + 6x + 4) = 0$ の二解は $x = -3 \pm \sqrt{5}$ より、

他解は $x = -3 - \sqrt{5}$ で与えられる。

(解2) 2.2で述べた解の共役性と、3.1で述べた解と係数の関係を用いれば、ほとんど計算せずに答を得られる。解の共役性より、他解は $x = -3 - \sqrt{5}$ であり、解と係数の関係より、 $(-3 + \sqrt{5}) \cdot (-3 - \sqrt{5}) = a/2$ なのでこれを解けば、 $a = 8$ を得る。

(例題2) 2次方程式 $x^2 - 3(a+2)x - 4 + 3a = 0$ の一解が $x = 2$ のとき、 a の値と他解を求めよ。

(解1) 中学生の場合、ふつう以下のように解答すると思う。

$$2^2 - 3(a+2) \times 2 - 4 + 3a = 4 - (6a+12) - 4 + 3a = -3a - 12 = 0 \Rightarrow a = -4$$

このとき、2次方程式は $x^2 + 6x - 16 = (x-2)(x+8) = 0$ となり、他解は $x = -8$ となる。

(解2) 3.1で述べた解と係数の関係を用いれば、他解を β とすると、

$$\begin{cases} \beta + 2 = 3(a+2) \\ 2\beta = -4 + 3a \end{cases}$$

となり、この連立方程式を解けば、 $2(3a+4) = -4 + 3a \Rightarrow a = -4 \Rightarrow \beta = 3a + 4 = -8$ となり、 a の値と他解を同時に求めることが出来た。

(例題3) 2次方程式 $x^2 - a^2x + ab = 0$ が異なる2つの実数解をもち、その2つの解よりそれぞれ1引いた解がともに2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ を満たすという。a, bの値を求めよ。

(解) 2次方程式 $x^2 - a^2x + ab = 0$ の2解を α, β とすると、2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の2解は $\alpha - 1, \beta - 1$ となり、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a^2 \\ \alpha\beta = ab \end{cases} \quad \begin{cases} (\alpha - 1) + (\beta - 1) = -a \\ (\alpha - 1)(\beta - 1) = b \end{cases}$$

となる。上2式より、 $a^2 + a - 2 = (a + 2)(a - 1) = 0$ なので、 $a = -2, a = 1$ をえる。

- $a = 1$ のとき、 $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = b$ より、

$$b = (\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = \alpha\beta - b$$

となり、 $D = 1 - 4b > 0 \Rightarrow b < 1/4$ を満たす任意の b に対して成立する。

- $a = -2$ のとき、 $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -2b$ より、

$$b = (\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = -2b - 3 \Rightarrow b = -1$$

従って、 $a = 1$ のとき $b < 1/4$ を満たす任意の b 、 $a = -2$ のとき $b = -1$ となる。

以上3つの例題からも、3.1で述べた「解と係数の関係」を利用する意義(いちいち2次方程式を解きなおす必要がない点など)を理解してもらえたと思う。

7. 二次方程式に帰着できる高次方程式や連立方程式

三次以上の方程式の中にも、うまく式の変形をすることによって二次方程式に帰着できるものがある。典型的な例題を以下に示す。

(例題1) 四次方程式 $(x^2 + 3x)^2 - 8(x^2 + 3x) + 12 = 0$ を解け。

(答) $x^2 + 3x = A$ とおくと、 $A^2 - 8A + 12 = (A - 2)(A - 6) = 0 \Rightarrow A = 2, 6$

- $A = 2$ のとき、 $x^2 + 3x = 2 \Rightarrow x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

- $A = 6$ のとき、 $x^2 + 3x = 6 \Rightarrow x^2 + 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$

(例題2) 四次方程式 $(x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3) = 5$ を解け。

(答) $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$ と $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$ では、共通項 $x^2 + x$ があるので、 $x^2 + x = A$ とおいて、

$$(A - 2)(A - 6) = 5 \Rightarrow A^2 - 8A + 12 - 5 = A^2 - 8A + 7 = (A - 1)(A - 7) = 0 \Rightarrow A = 1, 7$$

- $A = 1$ のとき、 $x^2 + x = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

- $A = 7$ のとき、 $x^2 + x = 7 \Rightarrow x^2 + x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$

(例題3) 四次の相反方程式 $x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 7x + 1 = 0$ を解け。

(答) $x = 0$ は解でないので、両辺を x^2 で割り、 $x^2 + 7x + 14 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

ここで、 $x + \frac{1}{x} = A$ とおくと、 $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = A^2 - 2$ より、この方程式は

$$A^2 - 2 + 7A + 14 = A^2 + 7A + 12 = (A + 3)(A + 4) = 0 \Rightarrow A = -3, -4 \quad \text{となる。}$$

- $A = -3$ のとき、 $x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$
- $A = -4$ のとき、 $x + \frac{1}{x} = -4 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$

また二次方程式の連立方程式も解けるようにしておこう。

(例題4) 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ xy = 2 \end{cases}$$

(答) $x + y = 7 - z, xy = 2$ より、第二式から、

$$(x + y)^2 - 2xy + z^2 = (7 - z)^2 - 4 + z^2 = 21 \Rightarrow 2z^2 - 14z + 24 = 2(z - 3)(z - 4) = 0 \Rightarrow z = 3, 4$$

- $z = 3$ のとき、 $x + y = 4, xy = 2$ から、2数の和が4、積が2の2解を持つ二次方程式を考えて、 $t^2 - 4t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow (x, y) = (2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}), (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$
- $z = 4$ のとき、 $x + y = 3, xy = 2$ から、2数の和が3、積が2の2解を持つ二次方程式を考えて、 $t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1, 2 \Rightarrow (x, y) = (1, 2), (2, 1)$

(例題5) 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3 = 0 \\ 3x^2 - 2xy + 8y^2 = 6 \end{cases}$$

(答) 第一式を変形して得た、 $2y = -4x - 3$ を第二式に代入し、

$$\begin{aligned} & 3x^2 - x(-4x - 3) + 2(-4x - 3)^2 - 6 = 0 \\ & \Rightarrow 39x^2 + 51x + 12 = 0 \Rightarrow 3(13x + 4)(x + 1) = 0 \\ & \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow y = (-4x - 3)/2 = 1/2 \\ x = -4/13 \rightarrow y = (-4x - 3)/2 = -23/16 \end{cases} \end{aligned}$$