

中学3年

「二次方程式の解法と応用」 演習問題

基礎レベル

1. 次の二次方程式を解け。
 - (1) $5x^2 - 23x + 12 = 0$ (2) $(x+7)^2 = 5$
 - (3) $(3x+1)^2 = 8$ (4) $-x^2 + 26x - 169 = 0$
 - (5) $3(x-2)^2 = 17 - 16x$ (6) $-2x^2 + 6x + 3 = 0$
 - (7) $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$ (8) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$
2. 二次方程式 $x^2 - 9x + 19 = 0$ の2解の整数部分をそれぞれ求めよ。またそれらを2解とする二次方程式を作れ。
3. 2本の直線 $k: x - 2y + 6 = 0$ 、 $m: 2x + y = 10$ の2つの直線と x 軸に囲まれた三角形に内接する長方形の面積が4であるという。この長方形の2辺の長さを求めよ。
4. 二次方程式の解の公式の導き方を説明せよ。
5. ある立方体で底面の正方形の各辺を2 cm縮め、高さを7 cmだけ増やしたところ、体積に変化がなかったという。もとの立方体の一辺の長さを求めよ。

中級レベル

6. ある湖の周りをA君とBさんが一周することになった。湖畔のホテルを出発点とし、Bさんが出発してから30分後にA君はBさんと反対方向に出発した。二人は午前10時に湖畔のある地点で出会い、そのまま歩き続け、Bさんはちょうど正午に出発点のホテルに到着した。それはA君がこのホテルに到着してから1時間15分後であった。二人の歩く速さは一定であるとし、二人とも途中で休まなかったものとする。Bさんの出発時刻を求めよ。
7. 二次方程式 $x^2 + (k+1)x + (k+1) = 0$ が重解をもつように定数 k の値を求め、そのときの重解も求めよ。

- 8 . 二次方程式 $(k+2)x^2 + (5k+6)x + (7k+2) = 0$ が重解をもつように定数 k の値を求め、そのときの重解も求めよ。
- 9 . x に関する二次方程式 $2x^2 + (m-10)x + m = 0$ の 2 解の差が 1 であるとき、定数 m の値を求めよ。
- 10 . x に関する二次方程式 $x^2 - mx + m + 2 = 0$ の 1 つの実数解がもう一つの実数解の 2 倍であり、2 解の差が 1 より大きいという。このとき、定数 m の値を求めよ。
- 11 . x についての 2 つの二次方程式 $x^2 + ax - 4 = 0$ 及び $x^2 + 3ax + 4 = 0$ がある。前者の方程式の 1 つの解より 2 だけ大きい値が後者の方程式の解になっているとき、 a の値を決定せよ。(慶応湘南藤沢)
- 12 . 二次方程式 $2x^2 + 5x + 1 = 0$ の 2 解を α, β とするとき、次の各式の値を、解と係数の関係などを用いて計算せよ。
 (1) $(\alpha + 4)(\beta + 4)$
 (2) $(\alpha - \beta)^2$
 (3) $\alpha^2 + \beta^2$
 (4) $(2\alpha^2 + 5\alpha - 4)(2\beta^2 + 5\beta - 4)$
 (5) $(\alpha^2 - 3\alpha + 7)(\beta^2 - 3\beta + 7)$
- 13 . 次の高次方程式を二次方程式に変形して解け。
 (1) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-12) + 5x^2 = 0$
 (2) $x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 16x + 4 = 0$
- 14 . 次の連立方程式を解け。
 (1)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x^2 - y^2 + 5y = 13 \end{cases}$$

 (2)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5(x+y) \\ x^2 + xy + y^2 = 25 \end{cases}$$

 (3)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

 (4)
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 22 \\ x^2 - xy + 10y^2 = 88 \end{cases}$$

 (5)
$$\begin{cases} xy + zx = 27 \\ yz + xy = 32 \\ zx + yz = 35 \end{cases}$$

上級レベル

15 . 次の、 x に関する二次方程式を解け。但し、(3)(4)の文字定数は実数とする。

$$(1) \quad \sqrt{6}x^2 - \sqrt{3}x + 1 = \sqrt{2}x$$

$$(2) \quad (7 - 4\sqrt{3})x^2 + (2 - \sqrt{3})x = 2$$

$$(3) \quad ax^2 - (bc + ca + ab)x + bc(b + c) = 0$$

$$(4) \quad a^2(x^2 - x + 1) - a(x^2 - 1) = (a^2 - 1)x$$

16 . 二次方程式 $x^2 + (m+1)x + (2m-1) = 0$ の2解が整数となるように整数 m の値を定めよ。

17 . 次の無限連分数の値 x を求めよ。(数学的には、この連分数が収束することを証明する必要はあるが、収束性は保証されているとして、計算だけ行えばよい。)

$$x = \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots}}}}}$$

18 . 二次方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ の2解を α, β とするとき、次の各対称式の値を、解と係数の関係を用いて計算せよ。

$$(1) \quad \alpha^3 + \beta^3$$

$$(2) \quad \alpha^4 + \beta^4$$

$$(3) \quad \alpha^5 + \beta^5$$

$$(4) \quad \sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$$

$$(5) \quad \beta\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha\sqrt{\beta^2 + 1}$$

19 . ある水槽に水を入れるために A、B、C の3本の管がある。A 管の直径は C 管の2倍である。C 管を使って満水にするには B 管を使うよりも6時間多くかかる。また B、C 両管を併せて用いると、A 管だけを使うよりも1時間多くかかるという。A、B、C を同時に使用すると、何時間で満水するか。但し、管中の流れの速さはすべて変わらないとする。

- 20 . コンピュータを連続して使用している部屋がある。コンピュータ作動中はこの部屋の温度は一定の割合で上昇する。いまコンピュータにとって上限の温度（この温度を越えるとコンピュータに不具合が発生する）から2つの冷房機X, Yを使って下限の温度まで室温を下げることにする。但し2つの冷房機はともに室温を一定割合で下げる能力を持っているとする。冷房機Xだけで冷房すると、冷房機Yだけの場合より7時間余計にかかって上限温度から下限温度に下げることが出来る。また上限温度の段階から12時間だけ冷房機Xを使用し、それから冷房機Yに切り替えると、その後6時間で下限温度に下げることが出来る。冷房機Xだけならば、何時間で上限温度から下限温度に下げることが出来るか。
- 21 . 一辺の長さ1の正三角形ABCを考える。辺BC, CA, AB上にそれぞれ点P, Q, Rをとり、 $BP = CQ = AR = x$ とする。但し、 $0 < x < 1/2$ とする。CRとABの交点をD、APとBQの交点をE、BQとCRの交点をFとする。三角形DEFの面積が正三角形ABCの面積の半分になるように、xの値を定めよ。