10. Nov. 2005

中学２年
「平行線、角度処理、三角形の合同条件、中点連結定理、四角形の性質を利用した幾何問題の証明」　演習問題

基礎レベル

１．１つの内角と外角の比が８：１の正多角形の辺数と対角線の本数を求めよ。

２．正三角形ＡＢＣの辺ＡＢ上に任意の点Ｄを取り、正三角形ＡＤＥを△ＡＢＣの外側に作れば、ＤＣ＝ＥＢとなることを証明せよ。

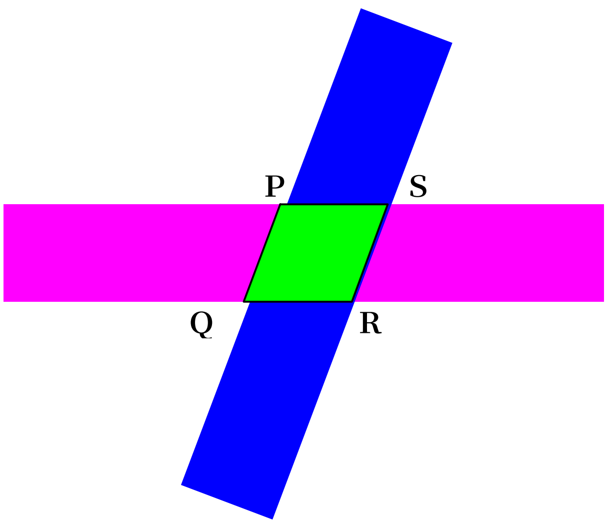
３．△ＡＢＣにおいて、ＡよりＢＣへ垂線ＡＤをひく。内角∠Ｂの二等分線とＡＤとの交点をＥとするとき、∠ＢＥＤ＝（∠ＢＡＣ＋∠ＢＣＡ）／２となることを証明せよ。

４．△ＡＢＣにおいて、ＡよりＢＣに下ろした垂線と∠Ｂの外角の二等分線の交点をＰとするとき、∠ＡＰＢは∠ＡＢＣの半分になることを証明せよ。

５．辺ＡＤと辺ＢＣが平行な台形ＡＢＣＤのＣＤの中点をＭとし、直線ＡＭと辺ＢＣの延長線との交点をＥとすると、ＡＤ＝ＣＥとなることを証明せよ。

６．二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直二等分することを証明せよ。

７．図のように、幅の等しいテープを斜めに重ねたとき出来る四角形ＰＱＲＳがひし形であることを、以下の手順に従って三角形の合同条件と平行線の角度に関する定理のみを用いて証明せよ。
<u>手順１</u>：ＰＱ＝ＲＳ，ＱＲ＝ＳＰの証明（「平行四辺形の２組の対辺の長さはそれぞれ等しい」ことを証明することと等価）
<u>手順２</u>：ＰＱ＝ＱＲの証明



８．△ＡＢＣの辺ＡＣ，ＡＢの中点をそれぞれＤ，Ｅとする。ＢＤをＫに、ＣＥをＬまでそれぞれ延長して、ＢＤ＝ＤＫ，ＣＥ＝ＥＬとすれば、３点Ｋ，Ａ，Ｌは同一直線上にあることを証明せよ。

中級レベル

９．**△ＡＢＣと△ＤＥＦにおいて、∠Ｃ＝∠Ｆ＝９０°，ＡＢ＝ＤＥ，∠Ｂ＝∠Ｅならば、△ＡＢＣ≡△ＤＥＦであること（直角三角形の合同条件：「斜辺と一つの鋭角が等しい」）を以下のそれぞれの方法で証明せよ。**

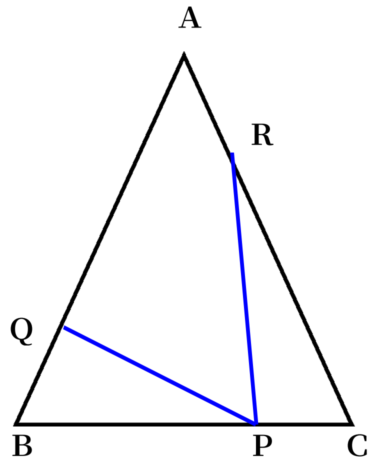
（１）　三角形の内角の和が１８０°であることを既に証明しているとして、直接法で。

（２） 「一点からその点を通らない直線への垂線はただ一つだけである」という補助定理をまず証明し、背理法（結論の否定が公理や既出定理ないし仮定に反することを述べて結論が正しいことを証明する方法）で。

（参考）（１）の「**三角形の内角の和が１８０°である」を証明するに当たって教科書で示されている証明法では、基礎事実として平行線の公理「直線外の一点を通ってこの直線に平行な直線は唯一つに限る」を用いている。この公理を提示したのは古代ギリシャのユークリッドであり、通常私達もこの公理が提示した空間を直感的に受け入れているが、近世になりボリヤイやロバチャフスキーは「定直線外の１点を通りこの直線に平行な直線は無数に引ける」ことを公理とした、またリーマンは「直線外の一点を通りこの直線に出会わない直線は一本もない」ことを公理とした、ユークリッドの平行線公理と全く異なる性格の公理に取り替えても矛盾のない新しい幾何学を創始した。ボリヤイやロバチャフスキーの提唱する幾何学は凹曲面上の幾何学と呼ばれ、例えば双曲面上の三角形の内角の和は１８０°より小さいことが証明される。リーマンの提唱する幾何学は凸曲面上の幾何学と呼ばれ、例えば球面上の三角形の内角の和は１８０°より大きいことが証明される。リーマン幾何学はアインシュタインの相対性理論の研究から、天文物理学において宇宙で実際に成立することが実証されている。**

１０．　**∠Ａ＝４５°の鋭角三角形ＡＢＣがある。頂点Ａから辺ＢＣに垂線を引き、辺ＢＣとの交点をＤとすると、ＢＤ＝２，ＤＣ＝４になった。このとき、頂点Ｂから辺ＡＣに垂線を引きＡＤとの交点をＥとすると、ＡＥの長さはいくらか。＜筑波大付属高＞**

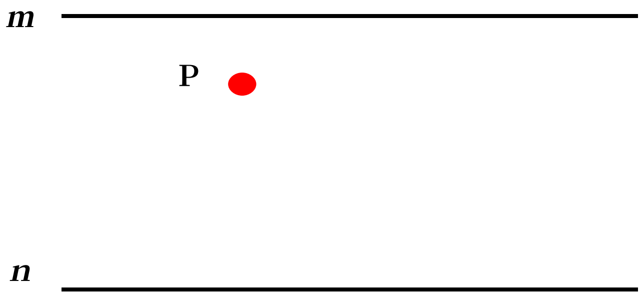
１１．　ＡＢ＝ＡＣ（＞ＢＣ），∠Ａ＝４０°の二等辺三角形において、辺ＢＣ上に適当な点Ｐをとり、ＢＱ＝ＣＲを満たすように点Ｑを辺ＡＢ上に、ＣＲ＝ＢＰを満たすように点Ｒを辺ＡＣ上にとる。このとき∠ＰＱＲは何度か。



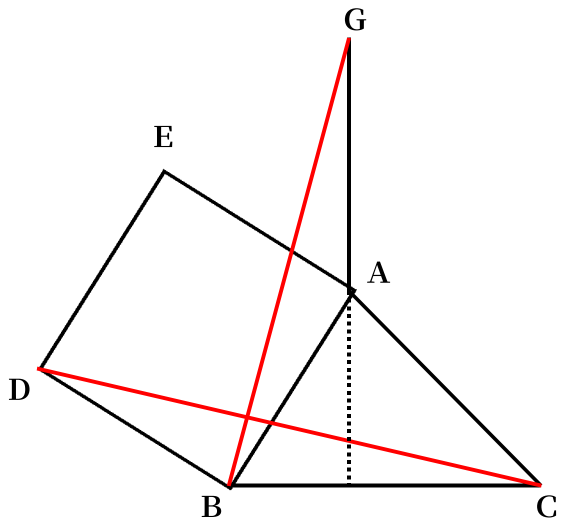
１２．　正三角形に関する以下の各設問に答えよ。

（１） 頂点Aを共有する２つの正三角形ＡＢＣとＡＤＥがあるとき、３点A，B，Dが一直線上になければ△ＡＢＤ≡△ＡＣＥであることを証明せよ。

（２） 図のように平行な２直線m, nとその間に点Ｐがある。（１）の結果を利用して、直線m上に点Ｑ、直線n上に点Ｒをとり、△ＰＱＲが正三角形となるように作図せよ。また作図の正しさを証明せよ。



１３．　図のように、△ＡＢＣの一辺ＡＢ上に正方形ＡＢＤＥを外側にかき、ＡからＢＣへの垂線をＢＣと反対側に延長してＡＧ＝ＢＣなる点Ｇをその直線の上にとるとき、ＢＧ＝ＣＤとなることを証明せよ。



１４．　平行四辺形は相対する２組の対辺が互いに平行である四角形として定義される。このとき、以下のことが成り立つことを**三角形の合同条件と平行線の角度に関する定理のみを用いて**それぞれ証明せよ。

（１） 対角線は、平行四辺形を合同な２つの三角形に分ける。

（２） 相対する角は等しい。

（３） 相対する辺は等しい。

（４） 対角線は互いに他を 2 等分する。

１５．　四角形は次のいずれかが成立すれば平行四辺形であることを証明せよ。

1）二組の対辺がそれぞれ平行なとき
2）二組の対辺の長さがそれぞれ等しいとき
3）二組の対角がそれぞれ等しいとき
4）一組の対辺が平行で長さが等しいとき
5）対角線が互いに他を２等分するとき

１６．　２辺およびその間にある中線（頂点と対辺の中点を結ぶ線分）が等しい２つの三角形は合同であることを証明せよ。

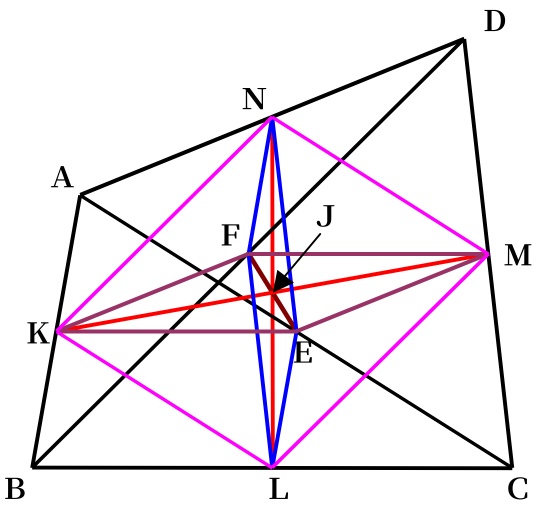
１７．　三角形の中点連結定理および重心に関して、以下の定理を**三角形の合同条件と平行線の角度に関する定理および**１３．と１４．の平行四辺形に関する定理**のみを用いて証明せよ。**

（１）　三角形の一辺の中点を通って他の一辺に平行な直線は第三辺を２等分する。
（２）　三角形の二辺の中点を結ぶ線分は第三辺に平行で、かつ第三辺の半分の長さに等しい。（中点連結定理）
（３）　三角形の３本の中線は１点で交わることを証明せよ。（この点を重心と呼ぶ。）
（４）　重心と三角形の各頂点との距離は、頂点を通る中線の距離の 2/3 に等しい。

１８．　**△ＡＢＣの２本の中線ＢＤ，ＣＥの長さが等しければ、△ＡＢＣはＡＢ＝ＡＣの二等辺三角形であることを証明せよ。**

１９．　四角形ＡＢＣＤにおいて、辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＤ，ＤＡの中点をそれぞれＫ，Ｌ，Ｍ，Ｎとする。また対角線ＡＣ，ＢＤの中点をそれぞれＥ，Ｆとする。また四角形ＫＬＭＮの対角線ＫＭ，ＬＮの交点をＪとする。それぞれを証明せよ。

（１）　３つの四角形ＫＬＭＮ，ＫＥＭＦ，ＬＥＮＦは平行四辺形である。
（２）　点Ｊは３つの平行四辺形ＫＬＭＮ，ＫＥＭＦ，ＬＥＮＦの各対角線ＫＭ，ＬＮ，ＥＦの中点である。
（３）　３点Ｅ，Ｊ，Ｆは共線である。



２０．　ＡＢ＝ＣＤの四角形において、ＡＤ，ＢＣの中点をそれぞれＰ，Ｑとし、対角線ＡＣ，ＢＤの中点をそれぞれM，Nとすれば、ＰＱ⊥MNであることを証明せよ。

２１．　△ＡＢＣにおいて、ＡＣの中点Ｅを通ってＡＢに平行な直線と、ＡＢの中点Ｆを通ってＢＥに平行な直線との交点をＨとすれば、△ＣＨＦの３辺は△ＡＢＣの３つの中線にそれぞれ等しく、またＥは△ＣＨＦの重心であることを証明せよ。

２２．　ＡＢ＜ＡＣなる△ＡＢＣの辺ＡＣ上に点ＤをＤＣ＝ＡＢとなるようにとり、ＡＤの中点をＥ、ＢＣの中点をＦとする。ＦＥとＢＡの延長の交点をＧとすれば、ＡＥ＝ＡＧとなることを証明せよ。

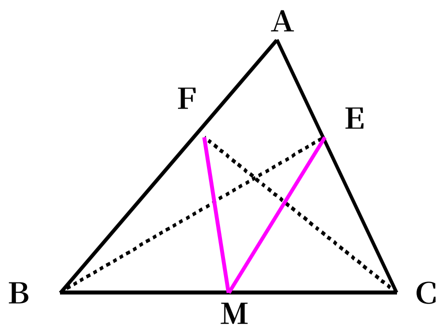
２３．　次の２つの命題は互いに逆の関係にある。それぞれを証明せよ。

（１）　△ＡＢＣにおいて、辺ＡＢの中点をMとするとき、AM＝BM＝CMならば、∠ＡＣＢは直角であることを証明せよ。

（２）　∠Cが直角の△ＡＢＣにおいて、斜辺ＡＢの中点をMとすれば、AM＝BM＝CMであることを証明せよ。

（注）（１）（２）により、∠Cが直角の△ＡＢＣの外接円の直径が斜辺ＡＢであることが証明できた。

２４．　∠Ａ＝５０°の鋭角三角形ＡＢＣの頂点Ｂ，Ｃより対辺ＣＡ，ＡＢにひいた垂線の足をそれぞれＥ，Ｆとし、辺ＢＣの中点をMとする。このとき∠MＥＦは何度か。



２５．　三角形の内心と傍心に関して以下の定理を証明せよ。

（１）　三角形の３つの内角の二等分線は一点で交わることを、三角形の合同条件を用いて証明せよ。（この点を内心と呼ぶ。）

（２）　△ＡＢＣの内心をＩとすると、∠ＢＩＣ＝９０°＋∠ＢＡＣ／２であることを証明せよ。

（３）　三角形の１つの内角の二等分線と他の二つの外角の二等分線は一点で交わることを三角形の合同条件を用いて証明せよ。（この点を傍心と呼ぶ。）

（４）　△ＡＢＣの∠Ａの内角の二等分線が作る傍心をI_{A}とすると、$\angle \mathrm{B}\mathrm{I}_{A}\mathrm{C}$＝９０°－∠ＢＡＣ／２であることを証明せよ。

２６．　△ＡＢＣで∠Ｂ＝６０°で、∠Ａ，∠Ｃの二等分線がＢＣ，ＡＢとそれぞれＤ，Ｅで交わるとき、ＣＤ＋ＡＥ＝ＡＣを証明せよ。

10. Nov. 2005

２７．　**長方形ＡＢＣＤにおいて、∠Ａの二等分線と、点Ｃを通る対角線ＢＤの垂線との交点をＥとすれば、ＣＡ＝ＣＥであることを証明せよ。**

２８．　**直角二等辺三角形ＡＢＣの点Ａから斜辺ＢＣに平行な直線を引き、その上にＢＤ＝ＢＣなるように１点Ｄをとり、ＢＤ，ＡＣの交点をＥとすれば、ＣＤ＝ＣＥとなることを証明せよ。**

２９．　**正方形ＡＢＣＤにおいて、点ＣからＢＤに平行にＣＥを引き、その上に１点ＥをＢＥ＝ＢＤとなるようにとり、ＢＥとＣＤとの交点をＦとすれば、ＤＥ＝ＤＦとなることを証明せよ。**

３０．　**△ＡＢＣにおいて、頂点Ｂから対辺ＡＣに引いた垂線の足をＤ、頂点Ｃから対辺ＡＢに引いた垂線の足をＥとする。ＢＤとＣＥの交点をＦとする。ＡＦが∠ＢＡＣを２等分するならば、ＡＦは辺ＢＣを垂直二等分することを証明せよ。**

３１．　**ＡＢ＝ＡＣの二等辺三角形ＡＢＣにおいて、辺ＡＢ，ＡＣの外側に正三角形ＡＢＤおよびＡＣＥをそれぞれ作り、ＣＤとＢＥの交点をＦとすれば、ＡＦは∠ＢＡＣを２等分することを証明せよ。**

３２．　**正方形ＡＢＣＤの辺ＢＣ上の任意の点をＰとし、∠ＰＡＤの二等分線と辺ＣＤとの交点をＱとすれば、ＤＱ＝ＡＰ－ＢＰとなることを証明せよ。**

３３．　**△ＡＢＣの辺ＡＢの中点をＭとし、辺ＢＣ，ＣＡを一辺として外側に正方形ＢＣＤＥおよび正方形ＡＣＦＧをそれぞれ作るとき、以下の問いに答えよ。**

（１）　ＣＭの長さはＤＦの長さの半分に等しく、かつＣＭ⊥ＤＦであることを証明せよ。

（２）　ＡＤ＝ＢＦかつＡＤ⊥ＢＦであることを証明せよ。

３４．　**四角形ＡＢＣＤの内部に辺ＡＢを斜辺とする直角二等辺三角形と辺ＣＤを斜辺とする直角二等辺三角形をかいたとき、２つの頂点が一致したという。このとき以下の設問に答えよ。**

（１）　ＡＣ＝ＢＤを証明せよ。

（２）　ＡＤ, ＢＣをそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形を四角形の内部に書くとき、直角である２つの頂点は一致することを証明せよ。

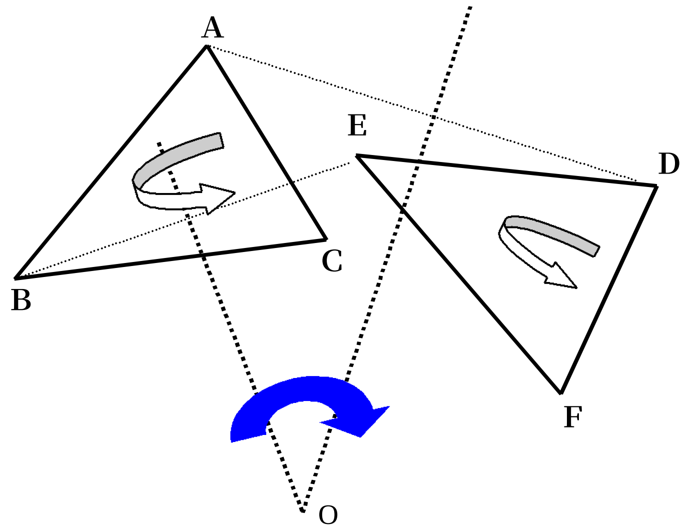
３５．　**<u>作図題</u>：ｈとｓの長さを持つ２本の線分が与えられているとき、高さがｈで周囲の長さがｓの二等辺三角形を作図せよ。またその作図法が正しいことを証明せよ。**

h

s

３６．　作図題：与えられた正方形ＡＢＣＤ内に頂点Ａを共有し、他の頂点Ｅ，Ｆをそれぞれこの正方形の辺ＢＣ，ＣＤ上に有する正三角形ＡＥＦを作図せよ。またその作図法が正しいことを証明せよ。

３７．　△ＡＢＣ≡△ＤＥＦのとき、図のようにＡＤの垂直二等分線とＢＥの垂直二等分線が交わるとして、その交点をＯとすれば、ＣＦの垂直二等分線もＯを通ることを証明せよ。（この方法によって、Ａ，Ｂ，Ｃの順に廻る向きとＤ，Ｅ，Ｆの順に廻る向きが同じであるとき、回転移動によって△ＡＢＣを△ＤＥＦに重ねることが出来る。回転中心がＯになる。）



３８．　△ＡＢＣ≡△ＤＥＦで、Ａ，Ｂ，Ｃの順に廻る向きとＤ，Ｅ，Ｆの順に廻る向きが同じであるとき、２度の線対称移動によって、△ＡＢＣを△ＤＥＦに（点Ａ，Ｂ，Ｃをそれぞれ点Ｄ，Ｅ，Ｆに）重ねることが出来ることを証明せよ。

上級レベル

３９．　△ＡＢＣにおいて、内角Ｂ，Ｃの二等分線が対辺と交わる点をそれぞれＤ，Ｅとし、これらの二等分線の交点をＩとする。（点Ｉはすなわち△ＡＢＣの内心である。）もしＩＤ＝ＩＥならば△ＡＢＣはどんな三角形になるか。またその様な形状に決定した理由を簡潔に述べよ。＜東工大＞

４０．　四角形ＡＢＣＤ内の任意の点Ｐから辺ＡＢ、ＢＣ，ＣＤ，ＤＡまたはそれらの延長上へおろした垂線の足をそれぞれＸ，Ｕ，Ｖ，Ｗとするとき、つねにＰＸ＋ＰＹ＝ＰＵ＋ＰＶが成り立つならば、ＡＢＣＤはどんな四角形か。＜阪大＞

４１．　ＡＢ＝ＡＣで高さＡＨの二等辺三角形ＡＢＣについて次の問いに答えよ。

（１）　底辺ＢＣ上の任意の点Ｐから他の２辺に下ろした垂線の長さの和がＡＨに等しいとき、この三角形は正三角形であることを証明せよ。

（２）　側辺ＡＢ上の任意の点Ｐから他の２辺に下ろした垂線の長さの和がＡＨに等しいとき、この三角形は正三角形であることを証明せよ。

４２．　正三角形ＡＢＣ内の任意の点Ｐから辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢに下ろした垂線の足をそれぞれＤ，Ｅ，Ｆとする。＜名古屋大改＞

（１）　ＰＤ＋ＰＥ＋ＰＦは一定であることを証明せよ。

（２）　ＢＤ＋ＣＥ＋ＡＦは一定であることを証明せよ。

４３．　一定の大きさの正ｎ角形のタイルを隙間なく敷き詰めることを考える。この条件を満足するｎを全て求めよ。

４４．　１つの三角形型装飾タイルを各辺で折り返していって平面を隙間なく敷き詰めるためには、三角形の３つの角（Ａ，Ｂ，Ｃ）（Ａ≧Ｂ≧Ｃ）がどのような組み合わせでなければならないか、決定せよ。

４５．　３つの正多角形が１点のまわりに重なりもせず、隙間もなく並んでいるとき、その正多角形の辺数をｐ，ｑ，ｒとすると、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2};\qquad 3\le \min(p,q,r)\le 6$$

また例えばｐ＝３のとき、上記の式を満たす自然数（ｑ，ｒ）の組み合わせを求めよ。

４６．　三角形の各辺の両端における内角の３等分線のうち、この辺に近いもの同士の交点は、１つの正三角形を作ることを証明せよ。（モーレーの定理）