30. Aug. 2005

中学２年
「一次関数とその利用」　　　解法のポイント

１．　座標

ｎ次元空間（ｎ＝２ならば平面、ｎ＝３ならば空間）内での点を解析的に（数値的に）表現する方法に座標がある。空間上の相異なる点は相異なる座標に１対１対応させる必要がある。代表的な座標に以下のようなものがある。

- デカルト（直交）座標：
  平面であればｘｙ座標系、空間であればｘｙｚ座標系というように互いに直交する座標軸で表現。
- 斜交座標：
  デカルト座標の変形。繊維や化学物質の結晶構造など、一定の規則で歪んでいるものを数学的に表現する場合に便利。
- 極座標：
  地球上の位置の（緯度、経度）表現はその代表。円や球上の点を表現する場合、半径一定という条件から次元を一つ下げて表現できるので便利。

中学の数学では、平面上でのデカルト座標すなわちｘｙ座標系を中心に学ぶ。

２．　関数の定義

定められた区間内の任意のｘに対してｙがただ一つ定まるとき、ｙをｘの関数とよび、

$$y = f(x)$$

とかく。例えば、与えられたｘに対しｙが２つ以上存在してｙを一つに決定することが出来ない場合、ｙはｘの関数であるということが出来ない。

（例１）　円はｘｙ座標で１つの関数で表現できない。
（例２）　人間の身長（ｘ）と体重（ｙ）の間の関係は１つの関数で表現できない。
（例３）　立方体の表面積Ｓと体積Ｖの関係：非一次関数 $V = (S/6)^{3/2}$ で表現される。

３．　一次関数とグラフ

$f(x)$ がｘの一次式で表現できる場合、$y = f(x)$ を一次関数と呼ぶ。

３．１　一次関数の表現と直線

一次関数は $y = ax + b$ で表現できる。図形としては直線を表す。
但し、全ての直線を一次関数 $y = ax + b$ で表現できるわけではない。
ｙ軸に平行な直線 $x = c$ は一次関数 $y = ax + b$ の形では表せないからである。

３．２　傾きと切片（ｙ切片）

一次関数 $y = ax + b$ の a を傾き、b を切片という。
切片は座標 $(0, b)$ に対応し、一次関数 $y = ax + b$ が表す直線とｙ軸との交点を表しているので、ｙ切片とも言う。
それに対し $y = ax + b$ が表す直線とｘ軸との交点 $(-b/a, 0)$ をｘ切片という場合もある。

一次関数 $y = ax + b$
• a を傾き、b を切片
• ｙ切片：$(0, b)$　；　ｘ切片：$(-b/a, 0)$

３．３　変化の割合

関数 y = f(x) 上の相異なる２点 $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ の間の<u>変化の割合</u>は、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \left(= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)$$

で与えられる。分母 $\Delta x = x_2 - x_1$ を<u>xの増加量</u>、分子 $\Delta y = y_2 - y_1$ を<u>yの増加量</u>という。

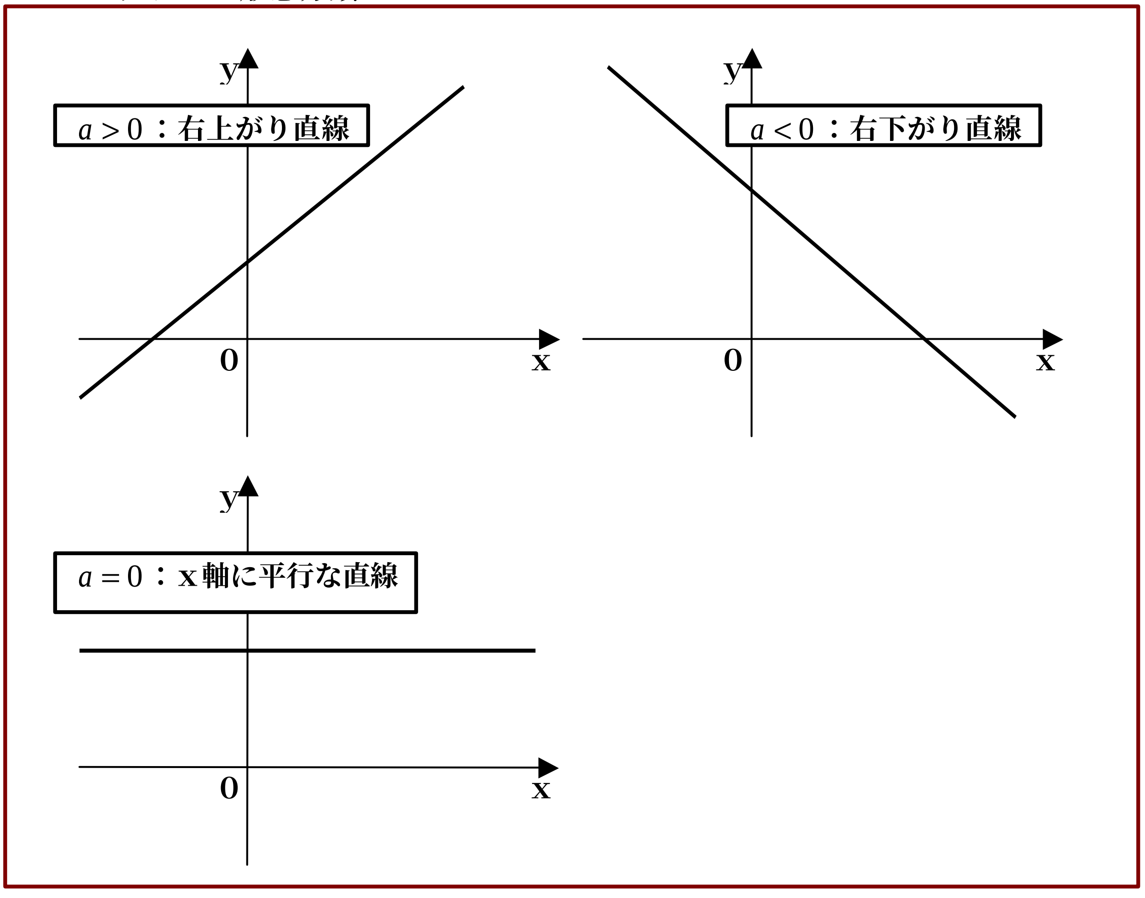
一次関数 $y = ax + b$ 上の任意の二点間の変化の割合は、

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

となるので、つねに傾き a に等しい。直線を図形的に考えれば、当然といえる。

一次関数 $y = ax + b$ 上の任意の二点間の変化の割合は、
二点の位置に関わらず、つねに傾き a に等しい。

３．４　グラフの形態分類



３．５　一次関数のグラフの書き方

直線は２点定めれば一意的に定まるというユークリッド幾何学の事実が基本となる。

（例１）　$y=2x-3$

- 切片－３と傾き２より、点（０、－３）と、（０、－３）から右（ｘ正方向）に１、上（ｙ正方向）に２行った点（１、－１）をプロットして、２点を結ぶ。
- ｘに適当に１と２を選んでそのときのｙの値を計算し、（１、－１）と（２、１）の２点をプロットして結ぶ。

など

（例２）　$y=-\frac{4}{5}x+2$

- 切片２より、点（０，２）と、（０，２）から右（ｘ正方向）に５、下（ｙ負方向）に４行った点（５、－２）をプロットして２点を結ぶ。
- 傾きの分母に５があるので、ｘに適当に－５と５を選んでそのときのｙの値を計算し、（－５，６）と（５、－２）の２点をプロットして結ぶ。

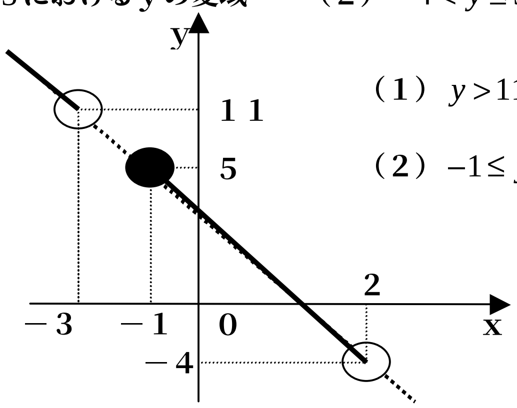
など

３．６　変域

現行の履修過程では不等式を中２では習わないので、グラフを使って変域を定めるのが最も無難である。

（例題）$y=-3x+2$ において次の変域を求めよ。

（１）$x<-3$ におけるｙの変域　　（２）$-4<y\leq 5$ におけるｙの変域



（１）$y>11$

（２）$-1\leq y<2$

４．　一次関数の決定

一次関数 $y=ax+b$ において

- a ：「傾き」や「変化の割合」と直接言う場合と、「ｘの増加量」と「ｙの増加量」を与えて「傾き」すなわち「変化の割合」を計算させる場合がある。
- 「別の直線 $y=a'x+b'$ と求める直線が平行である」という条件の場合、平行であれば変化の割合つまり傾きが等しいので、$a=a'$ より傾き a を決定できる。
- b ：「切片」と直接言う場合や「点（０、ｂ）を通る」或いは「ｙ軸と点（０、ｂ）で交わる」といった表現の仕方がある。

の２つが直接与えられれば、式は簡単に決定できる。

（例）$y=2x-3$に平行で点（０，４）を通る直線の式：
（答）傾きが２、切片が４より　$y=2x+4$

このケース以外の代表的な一次関数決定問題を以下に示す。

４．１　１点の座標(x_1, y_1)と傾きaが既知のケース

傾きaが既知なので、$y_1 = ax_1 + b$をbについて解いて、$b = y_1 - ax_1$より決定できる。
（例）$y=-4x-3$に平行で点（３，７）を通る直線の式：
（答）傾きが－４で、$b=7-(-4)\times 3=19$より$y=-4x+19$

４．２　２点の座標$(x_1, y_1)(x_2, y_2)$が既知のケース（但し$x_1 \neq x_2$）

（方法１）連立方程式に帰着させる方法
二つの未知量：aとbに関する連立方程式$y_1 = ax_1 + b$と$y_2 = ax_2 + b$を、

$$\begin{cases} x_1 a + b = y_1 \\ x_2 a + b = y_2 \end{cases}$$

と変形させて解き、aとbを決定する。

（方法２）４．１に帰着させる方法
変化の割合すなわち傾きaを

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

より決定し、$y_1 = ax_1 + b$をbについて解いて、$b = y_1 - ax_1$より決定できる。

上式を比べれば、（方法１）と（方法２）は同じ計算を別の見方で捉えていることが分かるだろう。
（例）２点（５，３）（－２，２４）を通る直線の式：
（答）（方法２）を使うと、
$a=(3-24)/\{5-(-2)\}=-3$；　$b=3-(-3)\times 5=18$
より、$y=-3x+18$を得る。

４．３　ｘ切片とｙ切片が既知のケース

ともに原点と異なる２点（ｃ、０）と（０、ｄ）を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{d}=1 \qquad \text{すなわち} \qquad y=-\frac{d}{c}x+d$$

で与えられる。

（例）２点（０、－３）（２，０）を通る直線の式：

（答）ｘ切片２、ｙ切片－３より、$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{(-3)}=1$　変形して $y=\dfrac{3}{2}x-3$

（別解）ｙ切片－３より $b=-3$

４．２の（方法２）より、$a=\{0-(-3)\}/(2-0)=3/2$　故に $y=\dfrac{3}{2}x-3$

４．４　一次関数のグラフからの式の決定

よくグラフが書いてあって直線の式を決定せよという問題があるが、

- グラフがｘ軸に平行な場合　　　　：ｙ＝・・・
- グラフがｙ軸に平行な場合　　　　：ｘ＝・・・

とすればよい。それ以外の場合は、３．５と同様、直線は２点定めれば一意的に定まるというユークリッド幾何学の事実をもとにすればよく、

- 切片と傾きがすぐ読み取れる場合　　：a と b を即時に決定
- １点の座標と傾きが読み取れる場合　：４．１に帰着
- ２点の座標が読み取れる場合　　　　：４．２に帰着
- ｘ切片とｙ切片が読み取れる場合　　：４．３に帰着

の４つの場合が基本となる。

５．　直線の方程式

３．１で述べたように全ての直線を一次関数 $y=ax+b$ で表現できるわけではない。ｙ軸に平行な直線 $x=c$ は一次関数 $y=ax+b$ の形では表せないからである。
そこで、図形としての直線を統一的に表現できる方程式を作る。

直線は、二元１次方程式

$$Ax+By+C=0$$

で与えられる。

- 直線がｙ軸に平行でない場合（$B\neq 0$）

  直線は一次関数　$y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$　に変形できる。つまり傾き $a=-\dfrac{A}{B}$、ｙ切片 $b=-\dfrac{C}{B}$ となる。$A=0$ の場合、直線 $y=-\dfrac{C}{B}$ となりｘ軸に平行になる。

- 直線がｙ軸に平行な場合　　（$A\neq 0$、$B=0$）

  $Ax+C=0$ になるので、直線は $x=-\dfrac{C}{A}$ となる。

高校での履修範囲となるが、平面の方程式は三元１次方程式

$$Ax+By+Cz+D=0$$

で表現できることを付記しておく。

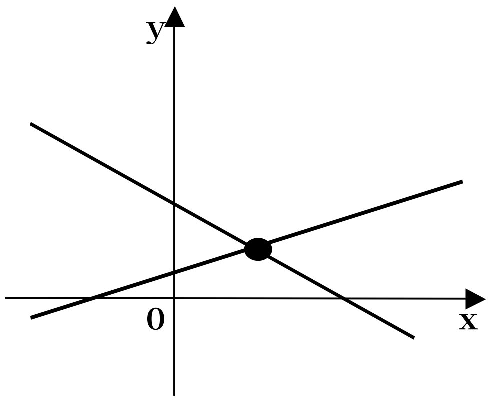
6.　２直線の交点と連立方程式の解

同一平面上にある２直線の幾何学的関係は、「交わる」「平行」「一致」の３つに分類できる。
２直線をそれぞれ二元１次方程式で表現した場合、

幾何学的関係	連立方程式の解
交わる	• 連立方程式が１つの解をもつ • 交点の座標が解に相当する
平行	不能（解が存在しない）
一致	不定　（解が無数あり定まらない）

という関係になる。具体的な関係を以下にまとめる。

直線 $A_1x+B_1y+C_1=0$ と直線 $A_2x+B_2y+C_2=0$ の間の関係



交わる
⇔ 連立方程式が一解をもつ

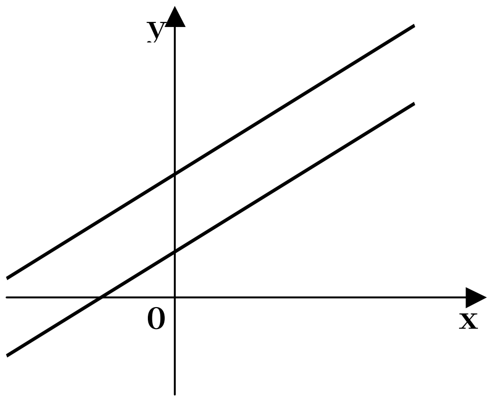
$$\Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

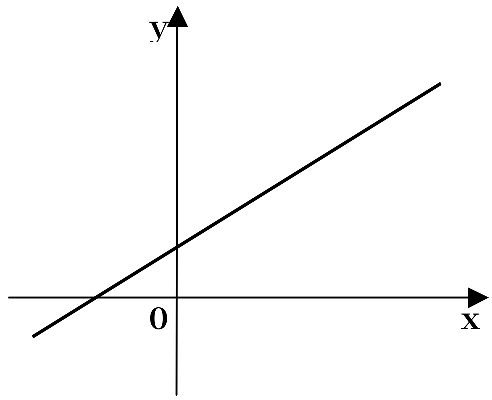
$$\Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$$

交点の座標

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

$$y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$





平行
⇔ 連立方程式が不能

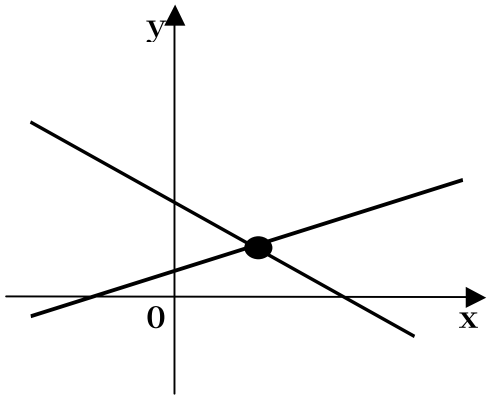
$$\Leftrightarrow (A_1B_2 - A_2B_1 = 0) \wedge$$
$$[(B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0) \vee (C_1A_2 - C_2A_1 \neq 0)]$$

一致
⇔ 連立方程式が不定

$$\Leftrightarrow (A_1B_2 - A_2B_1 = 0) \wedge$$
$$(B_1C_2 - B_2C_1 = 0) \wedge (C_1A_2 - C_2A_1 = 0)$$

30. Aug. 2005

直線 $y=a_1x+b_1$ と直線 $y=a_2x+b_2$ の間の関係

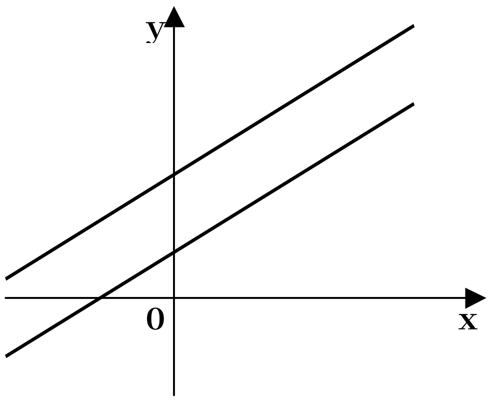


交わる
$\Leftrightarrow$ 連立方程式が一解をもつ
$\Leftrightarrow a_1 \neq a_2$

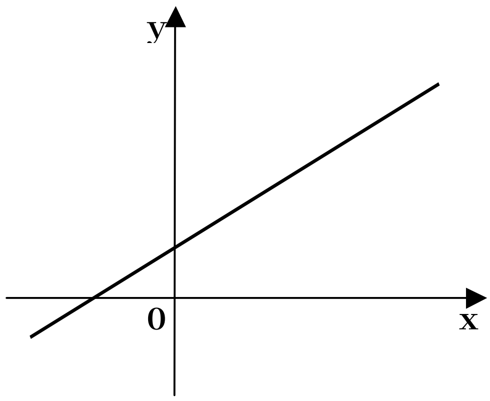
交点の座標

$$x=-\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}$$

$$y=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1-a_2}$$



平行
$\Leftrightarrow$ 連立方程式が不能
$\Leftrightarrow (a_1=a_2)\wedge(b_1\neq b_2)$



一致
$\Leftrightarrow$ 連立方程式が不定
$\Leftrightarrow (a_1=a_2)\wedge(b_1=b_2)$

(例) 直線 $3x+2y-5=0$ (つまり $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$) と以下の直線の関係について調べよ。

(1) 直線 $2x+3y-5=0$ ：連立方程式として解き、解 (1, 1) が<u>交点</u>の座標

(2) 直線 $6x+4y-10=0$ ：変形して $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ となり<u>一致</u>

(3) 直線 $-12x-8y+3=0$ ：変形して $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}$ となり<u>平行</u>

7.　解析幾何とユークリッド幾何の対応

高校に入ると、図形の方程式、ベクトル解析、複素解析といった図形を解析的に表現する解析幾何学を学ぶが、中学の段階では、以下に述べる基礎事項を理解すれば十分である。

ユークリッド幾何	解析幾何
点	座標　(x, y)
直線	方程式 $Ax+By+C=0$
２直線の交点	連立方程式の解

直線 $y=a_1x+b_1$ と直線 $y=a_2x+b_2$ の間の関係	
平行（一致を含む）	$a_1=a_2$
垂直	$a_1 \cdot a_2=-1$
直線 $A_1x+B_1y+C_1=0$ と直線 $A_2x+B_2y+C_2=0$ の間の関係	
平行（一致を含む）	$\det\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}=A_1 \cdot B_2-A_2 \cdot B_1=0$
垂直	$A_1 \cdot A_2+B_1 \cdot B_2=0$

平面上の点どうしの関係 A (x_1, y_1)，B (x_2, y_2)，C (x_3, y_3)の３点を考える。	
２点ＡＢの中点（１：１に内分する点）	$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$
２点ＡＢをｍ：ｎに内分する点	$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$
２点ＡＢをｍ：ｎに外分する点	$\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$
３点ＡＢＣの共線条件 （３点が同一直線上にある条件）	$\det\begin{bmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{bmatrix}=$ $(x_2-x_1)\cdot(y_3-y_1)-(x_3-x_1)\cdot(y_2-y_1)=0$
３点ＡＢＣが三角形を作る場合の 三角形の重心	$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

またよく出題される例として、「３本の直線が三角形を作るか否か」というものがあるが、「３本の直線が三角形を作らない」ための<u>必要十分条件</u>は

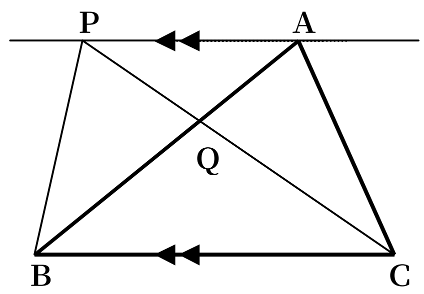
「３本のうちの少なくともどれか２本が平行」または「３本の直線が１点で交わる」であり、それ以外の場合は必ず三角形を作る。

８．　等積変形および三角形の面積公式

８．１　等積変形

中学の関数及び図形の問題において重要な項目に「等積変形」がある。

三角形の等積変形



点Ａを通りＣＢ（ＢＣ）に平行な直線を引くと、その直線上の任意の点Ｐに対して、

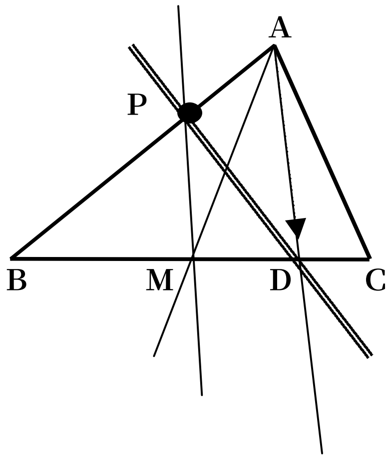
$$\Delta ABC = \Delta PBC$$

またＡＢとＰＣの交点をＱとして、

$$\Delta QAC = \Delta QPB$$

も派生的に言える。

三角形の面積二等分線



点Ｐを通り三角形ＡＢＣの面積を２等分する直線

<u>作図手順</u>：

１）　　ＢＣの中点Ｍを作図。

２）　　ＰＭを引く。

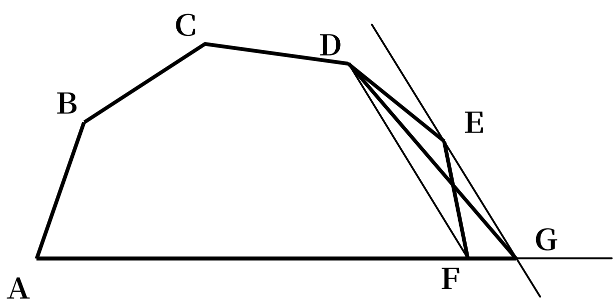
３）　　ＡからＰＭに平行線を引き、ＢＣとの交点をＤとおく。

４）　　ＰＤが求める面積二等分線。

理由：上記の等積変形を利用

$$\Delta PBD = \Delta PBM + \Delta PMD$$
$$= \Delta PBM + PMA = \Delta ABM$$
$$= \Delta ABC/2$$

（ｎ＋１）角形のｎ角形への等積変形



左図は６角形ＡＢＣＤＥＦを５角形ＡＢＣＤＧに変形する方法を示している。（Ｅを通りＤＦと平行な直線とＡＦの延長線との交点をＧとおいている。）

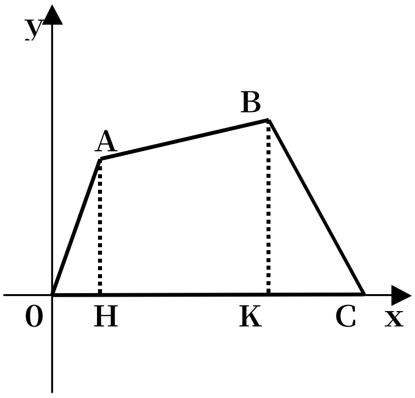
同様な操作を繰り返していき、最終的に三角形ＡＢＩを作ることが出来る。

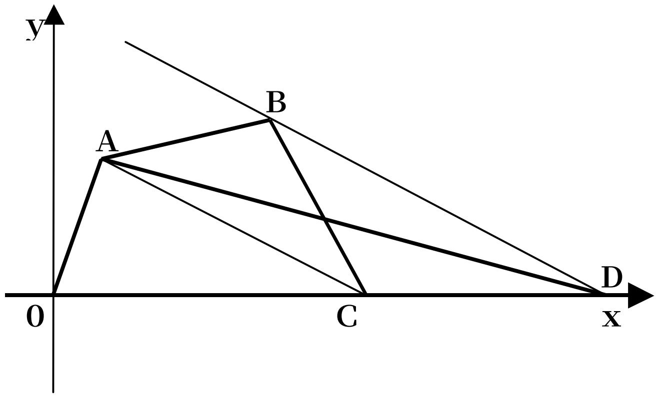
（例題）４点Ｏ（０，０）、Ａ（１，６）、Ｂ（３，８）、Ｃ（４，０）からなる台形ＯＡＢＣの面積を求めよ。

（１）　通常の分割法（三角形ＡＯＨ＋台形ＡＨＫＢ＋三角形ＢＫＣ）による方法

（２） 三角形ＡＯＤへの等積変形（Ｂを通ってＡＣに平行な直線とＯＣの延長線との交点をＤとする）を用いる方法

下図を参考に各自求めてみよ。答は２１になる。





８．２　三角形の面積

面積の本質的意味は、高校や大学で学ぶ積分法の概念を理解しないと把握できないが、中学の段階では、「図形の効率的計量の方法」を学ぶことに重点が置かれる。円などの曲線で囲まれた図形は異なるが、直線だけで囲まれた多角形は必ず三角形に分割できるので、三角形の面積が全ての基本となる。

三角形の面積公式：１

（三角形の面積）＝（底辺）X（高さ）／２

という小学校で勉強した公式（長方形を等積変形した平行四辺形が対角線によって合同な２つの三角形に分割できることで証明できる）が全ての基本となる。

関数との混合問題では、まずどこを底辺あるいは高さとみれば全体の計算量を最も減らし楽に出来るかを考えて工夫していく必要がある。底辺はつねにｘ軸（水平面）に平行ととらわれず、紙面を（頭の中でも実際にも）回転させながら考えてもらいたい。

（例題）３点Ｏ（０，０），Ａ（－２，４），Ｂ（６，８）で出来る三角形の面積を求めよ。

（１）大きい長方形から３つの三角形を切り取って求める方法

$$8\times\{6-(-2)\}-[(8-4)\times\{6-(-2)\}\div 2+6\times 8\div 2+4\times\{0-(-2)\}\div 2]=20$$

（２）直線ＡＢとｙ軸の交点をＤとして、三角形ＡＯＤと三角形ＢＯＤの面積を求めて和を取る方法

直線ＡＢの方程式は $y=x/2+5$ なので、Ｄ（０，５）

三角形ＡＯＤと三角形ＢＯＤはともにＯＤを共通の底辺に持っているので、

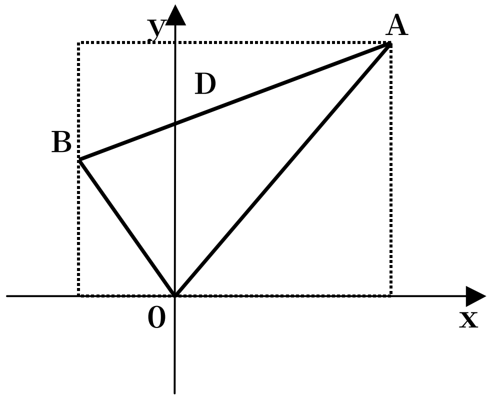
三角形ＡＯＤの高さはＡのｘ座標－２より２、

三角形ＢＯＤの高さはＢのｘ座標６より６

$$\Delta ABO=\Delta AOD+\Delta BOD=5\times 2\div 2+5\times 6\div 2=5\times\{6-(-2)\}\div 2=20$$

（３）次節に述べる公式を用いる方法（一番計算量が少なくて済む）

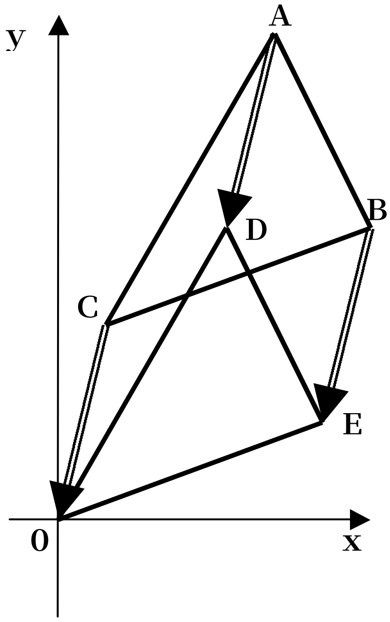
$$\Delta ABO=\frac{\left|\det\begin{bmatrix}6 & 8\\ -2 & 4\end{bmatrix}\right|}{2}=\frac{|6\times 4-8\times(-2)|}{2}=\frac{|24-(-16)|}{2}=\frac{|40|}{2}=\frac{40}{2}=20$$



８．３　行列式を用いた三角形の面積公式

座標で３点が与えられた場合、次の公式は非常に便利である。統一的証明は高校で学ぶベクトル解析を必要とするが、長方形から三角形を切り取る方法でも証明は可能である。

三角形の面積公式：２



三角形ＡＢＣの点Ｃを原点Ｏに平行移動することで、点Ａは点Ｄに、点Ｂは点Ｅに同様に移動して、三角形ＡＢＣと合同な三角形ＤＥＯが出来るものとする。

$$A(x_A, y_A) \to D(x_A - x_C, y_A - y_C) = D(x_D, y_D)$$
$$B(x_B, y_B) \to E(x_B - x_C, y_B - y_C) = E(x_E, y_E)$$
$$C(x_C, y_C) \to O(x_C - x_C, y_C - y_C) = O(0,0)$$

三角形ＤＥＯの面積は

$$\Delta DEO = \frac{\left| \det\begin{bmatrix} x_D & y_D \\ x_E & y_E \end{bmatrix} \right|}{2} = \frac{|x_D \cdot y_E - x_E \cdot y_D|}{2}$$

で与えられる。

三角形ＡＢＣの面積は、三角形ＤＥＯの面積に等しいので、

$$\Delta ABC = \Delta DEO$$
$$= \frac{\left| \det\begin{bmatrix} x_D & y_D \\ x_E & y_E \end{bmatrix} \right|}{2} = \frac{\left| \det\begin{bmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{bmatrix} \right|}{2}$$
$$= \frac{|(x_A - x_C)\cdot(y_B - y_C) - (x_B - x_C)\cdot(y_A - y_C)|}{2}$$

で与えられる。

（例題）３点Ａ（－２，７），Ｂ（３，１２），Ｃ（９，４）で出来る三角形の面積を求めよ。

（答）Ａを原点に平行移動するとＢはＤ（５，５）、ＣはＥ（１１、－３）にうつる。

$$\Delta ABC=\Delta ODE=\frac{\left|\det\begin{bmatrix}5 & 5\\ 11 & -3\end{bmatrix}\right|}{2}=\frac{\left|5\times(-3)-5\times 11\right|}{2}=\frac{\left|-70\right|}{2}=\frac{70}{2}=35$$

三角形の面積公式には、上記の公式以外に、中３で学ぶ三平方の定理を利用して得られるヘロンの公式（３辺の長さから面積を計算）や、高１高２で学ぶ三角関数やベクトル解析の手法を用いた公式など色々あることだけ留意してもらいたい。

９．　一次関数の利用に関する典型的な問題

一次関数の利用は実社会での応用性が非常に高い。問題を解く上では、まず以下の注意点に留意してほしい。

- 一次関数$y=ax+b$において、変数xとyが何を表しているか、比例部分axと定数部分bが何を表しているか、傾き（変化の割合）aの意味が何かをまず把握すること。
- 変数xとyの一目盛りの量と単位をまず把握すること。
- 変数xとyの単位が何かを把握し、計算する上での単位を全て、変数xとyの一目盛りの単位に常に揃えること。例えばｋｍとｍや、時間と分と秒を混同せずに、単位換算でミスのないようにすること。

  １ｋｍ＝１０００ｍ　－－－＞　１ｍ＝０．００１ｋｍ
  １ｍ＝１００ｃｍ　－－－＞　１ｃｍ＝０．０１ｍ
  １時間＝６０分　－－－＞　１分＝１／６０時間
  １Ａ＝１０００ｍＡ　－－－＞　１ｍＡ＝１／１０００Ａ
- 億劫がらずに、必要があればきちんと<u>直線の式を計算で求めること</u>。
- グラフが与えられていない場合は、問題文から変数xとyの対象を決定し、変数xとyの関係を一次関数$y=ax+b$に表せるように、傾きa、切片bを決定する。二組の（x、y）から４．２と同様の方法で傾きa、切片bを決定するケースが大半である。但し、グラフが問題文に与えられていない場合、億劫がらずに必ず簡単でよいから<u>グラフを書くこと</u>。グラフを見れば、数値だけでは見えない、イメージによる事象の簡易な理解が出来るので、ミスを防ぐことが可能だ。
- グラフが与えられている場合、以下のいずれかの方法で直線の式を求めればよい。
  - ｙ切片と変化の割合がすぐに分かる場合は、すぐに直線の式を決定
  - 変化の割合とｘｙ両座標とも整数の１点が分かる場合、４．１より直線の式を決定
  - ｘｙ両座標とも整数の２点が分かる場合、４．２より２点を通過する直線の式を決定

以下、代表的な一次関数の利用に関する問題パターンを紹介する。

９．１　場合分け型

時間とともに動点が移動することで、図形のパターンが変化するような事象において、位置や時間による適切な場合分けと関数のグラフの表示を要求する問題が、よく出題される。

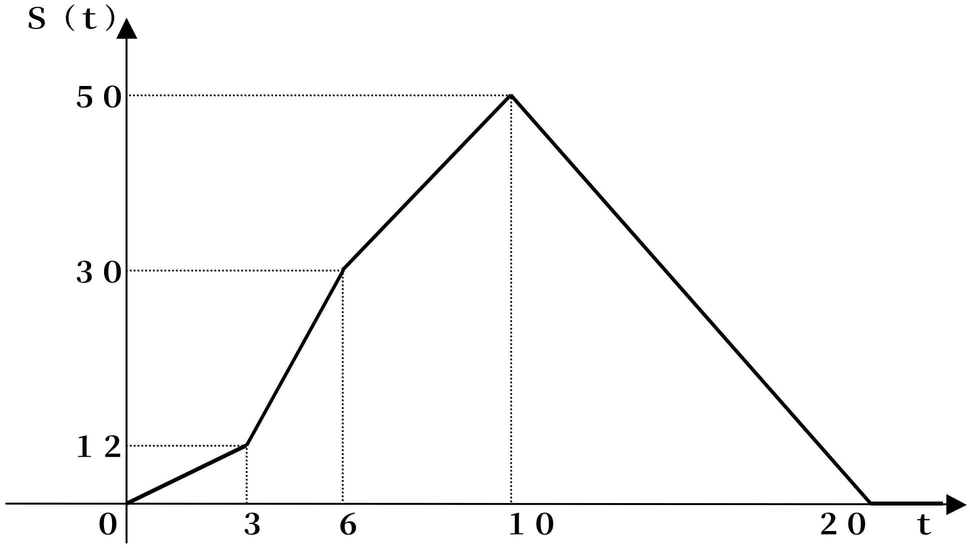
（例題）下図のように４点Ａ（８，１０）、Ｂ（０，６）、Ｏ（０，０）、Ｃ（１４，０）が与えられている。２点Ｐ，Ｑは同時にＢを出発し、どちらも辺ＢＯ、ＯＣ上をＣまで進み、Ｃに到着した後に停止する。但し、動点Ｐは毎秒２、動点Ｑは毎秒１の速さで、それぞれ進むものとする。２点Ｐ，Ｑが出発してからｔ秒後の、線分ＡＰ、ＡＱおよび座標軸で囲まれる図形の面積をＳとする。Ｓをｔの関数として表現し、縦軸にＳ、横軸にｔとおいた関数Ｓ（ｔ）のグラフを表せ。

（答）動点Ｐ，ＱがＢからＯを通ってＣに至る経路座標$s_P(t), s_Q(t)$**を導入すると便利である。例えば点Ｐは、出発点Ｂから３秒後に移動距離６で点Ｏに、１０秒後に移動距離２０で点Ｃにいるので、**$s_P(3)=6, s_P(10)=20$ **となる。つまり、**

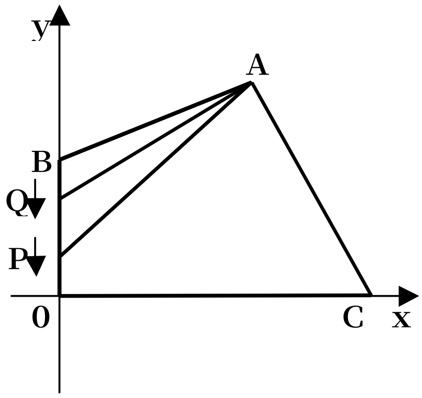
$$s_P(t)=\begin{cases}2t & (0\le t<10)\\ 20 & (t\ge 10)\end{cases}$$

$$s_Q(t)=\begin{cases}t & (0\le t<20)\\ 20 & (t\ge 20)\end{cases}$$

で表せる。下記の５つのケースに場合分けすることで、下のグラフを得る。



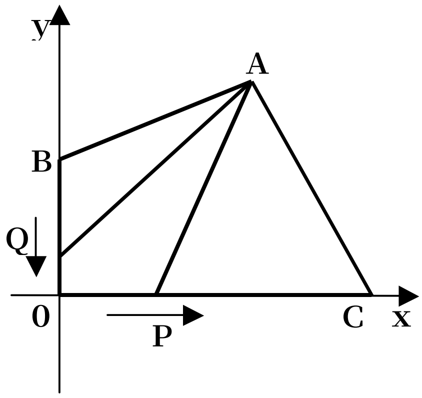
$$S(t)=\begin{cases}3t & (0\le t<3)\\ 6t-6 & (3\le t<6)\\ 5t & (6\le t<10)\\ -5t+100 & (10\le t<20)\\ 0 & (t\ge 20)\end{cases}$$



ケース１：$0 \le t < 3$
P，Qともに辺ＯＢ上を移動。

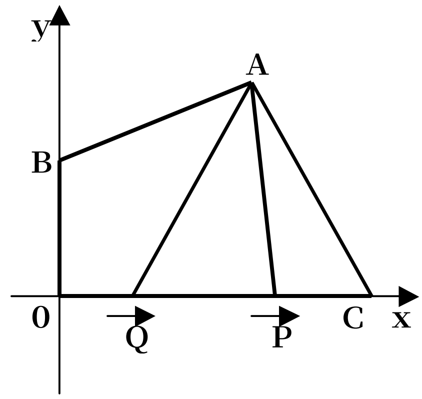
$$\left.\begin{aligned} BP &= s_P(t) = 2t \\ BQ &= s_Q(t) = t \end{aligned}\right\} PQ = BP - BQ = t$$

$$S(t) = \Delta APQ = t \times 8 \div 2 = 4t$$



ケース２：$3 \le t < 6$
Pは辺ＯＣ上、Qは辺ＯＢ上を移動。

$$OQ = OB - s_Q(t) = 6 - t$$
$$\Rightarrow \Delta AOQ = 8 \times (6 - t) \div 2 = -4t + 24$$
$$OP = s_P(t) - OB = 2t - 6$$
$$\Rightarrow \Delta AOP = 10 \times (2t - 6) \div 2 = 10t - 30$$
$$\therefore S(t) = \Delta AOQ + \Delta AOP = 6t - 6$$

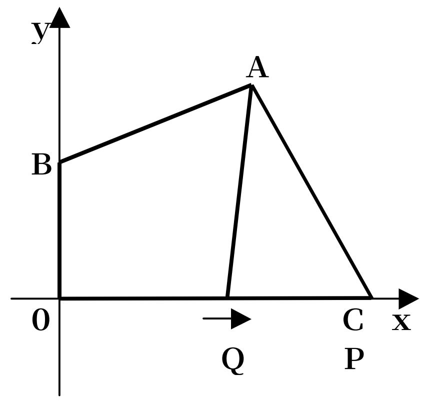


ケース３：$6 \le t < 10$
P，Qともに辺ＯＣ上を移動。

$$PQ = s_P(t) - s_Q(t) = 2t - t = t$$
$$S(t) = \Delta APQ = t \times 10 \div 2 = 5t$$

ケース４：$10 \le t < 20$
PはCに停止、Qは辺ＯＣ上を移動。

$$s_P(t) = 20, s_Q(t) = t$$
$$\Rightarrow PQ = s_P(t) - s_Q(t) = 20 - t$$
$$\therefore S(t) = \Delta APQ = (20 - t) \times 10 \div 2 = -5t + 100$$



ケース５：$t \ge 20$
P、QともにCに停止。

$$s_P(t) = s_Q(t) = 20$$
$$\Rightarrow PQ = s_P(t) - s_Q(t) = 0$$
$$\therefore S(t) = \Delta APQ = 0$$

「効率的で無駄のない場合分け」は、コンピュータプログラミングにおいても、政策や経営戦略を合理的に意思決定するときにも、非常に有用である。製品のシステム設計、経営戦略の策定、事故防止マニュアルの作成などにおいて、事象やタスクの最適なケース分類、Ｉｆ－ｔｈｅｎルール（ある事象ではこういう対策を採用するというルール）の生成、Ｗｈａｔ－ｉｆ解析の実施は非常に重要なプロセスで、システム工学の分野では決定木、フローチャート、ＰＤＰＣ計画図法などの汎用の解析手法が多く利用されている。実生活でも、「効率的で無駄のない場合分け」をする能力を要求される場面が非常に多いと思われる。

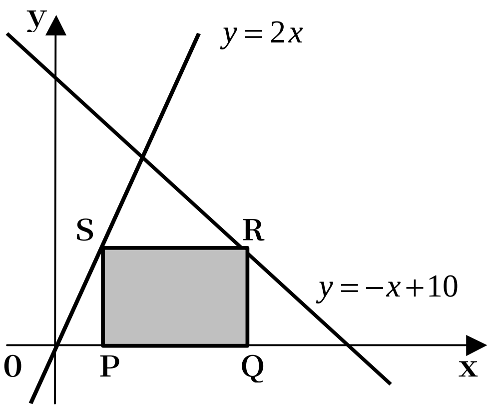
９．２　動点のパラメタ（媒介変数）表現

図形上の動点の座標を、時間をパラメタ（媒介変数）として表現する問題を９．１で扱った。さて、ある動点のｘ座標およびｙ座標を、１つのパラメタｖに関する関数でそれぞれ

$$\begin{cases} x = g(v) \\ y = h(v) \end{cases}$$

と表現できれば、そのパラメタｖを数学的操作によって消去できれば、その動点のｘとｙの関係を満たす方程式$F(x, y) = 0$を見つけることが出来る。これを一般に<u>動点が描く図形（軌跡）の方程式</u>と呼ぶ。詳細は高校数学になるので別稿に譲り、中学数学で頻出の例題２題を紹介するにとどめる。

（例題）下図で長方形ＰＱＲＳが正方形になるときの点Ｐの座標を求めよ。



（答）この場合Ｐのｘ座標を規定するよりも、ＳとＲのｙ座標が等しいことに着目し、ＳとＲのｙ座標をｔとおく。つまり、$P(t/2, 0)$, $S(t/2, t)$, $R(10-t, t)$, $Q(10-t, 0)$と表現できる。長方形ＰＱＲＳが正方形になるためには、ＳＲ＝ＰＳすなわち、$10 - t - t/2 = t$が成り立てばよいから、$t = 4$を得る。従って<u>点Ｐ（２，０）</u>となる。

（例題）点Ｐが直線$y = 2x + 5$の上を変域$x \geq 0$の範囲で動く。点Ｏ（０，０）、点Ａ（２，１）とするとき、四角形ＯＡＱＰが常に平行四辺形となるように点Ｑが動くとしたとき、点Ｑが描く軌跡の方程式とｘの変域を求めよ。

（略解）図は省略する。点Ｐのｘ座標をｔとおくと、$P(t, 2t+5)$, $t \geq 0$となる。四角形ＯＡＱＰが平行四辺形となるための必要十分条件は、３点Ｏ，Ａ，Ｐが一直線に並ばず、かつＡＰとＯＱの中点が一致すればよい。動点Ｑの座標を$Q(X, Y)$とおけば、ＱＯの中点とＡＰの中点が一致するので、$(X/2, Y/2) = ((t+2)/2, (2t+6)/2)$となり、$(X, Y) = (t+2, 2t+6)$

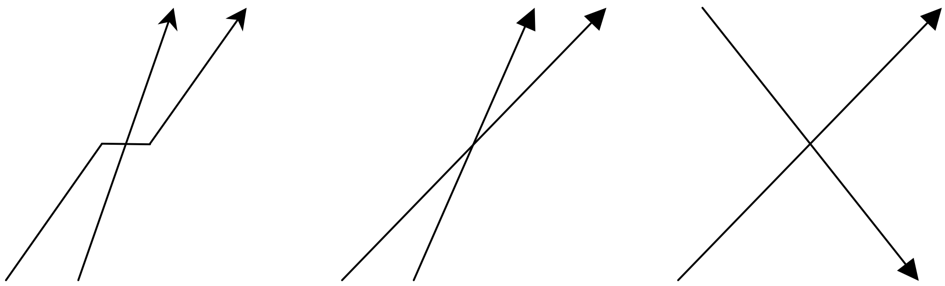
を得る。$t \geq 0$ の範囲でパラメタｔを消去し、$t = X - 2$ を代入して

$$Y = 2(X-2)+6 = 2X+2;\ X \geq 2$$

の関係を得る。ゆえに動点Ｑの軌跡の方程式は、$\underline{y = 2x+2;\ x \geq 2}$ で与えられる。

９．３　ダイヤグラム

一定の路線を定期的に走行する鉄道やバスの運行スケジュールはダイヤグラムで表現されることが多い。実際の鉄道、バス、自動車の走行では、頻繁に加速、減速、一時停止が発生するが、ダイヤグラム上では一定区間内を平均速度で走行するものと解釈する。
中学数学での応用問題では、一定区間での人や乗り物の移動、プール内での競泳、エレベータの昇降など様々な事象にダイヤグラムを使う例が見られる。基本的にダイヤグラムでは横軸に時間、縦軸に走行（移動）距離をとる。１目盛りの数量と単位（１秒なのか１０秒なのか、１分なのか５分なのか、１時間なのかなど）をきちんと把握し、計算に当たって統一した単位を用いることに注意すべきである。



停車中の乗り物、停止中の人の追い抜き、急行列車の通過　　追い抜き　　すれ違い、衝突

代表的なダイヤグラムの事象が、上記の３つのケースである。追い抜きやすれ違いの瞬間時点を求めるためには、グラフでの読み取りが困難な場合は、交差する２直線の式ないし方程式を求め連立して交点を求める必要がある。

（例題）Ａ君は午前１０時に自転車でＤ町を出発し、毎時１２ｋｍの速さで１０ｋｍはなれたＥ市に向かった。午前１０時ｘ分におけるＡ君のＤ町からの距離をｙｋｍとして、各問に答えよ。

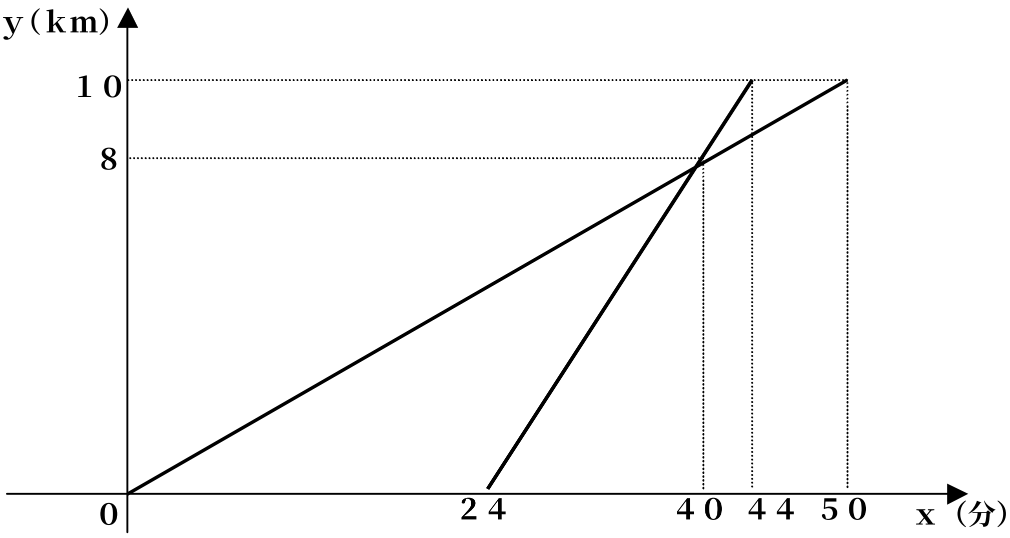
（１）　ｙをｘの式で表せ。ｘの変域を決めよ。

（２）　Ｂさんは午前１０時２４分にＤ町を出発し、毎時３０ｋｍの自動車でＥ市に向かった。ＢさんがＡ君を追い越す地点はＤ町から何ｋｍ離れているか。

（答）（問題にグラフが与えられていなくても）必ずグラフを書くこと。

（１）　Ａ君は時速１２ｋｍ＝分速０．２ｋｍなので、$y = 0.2x$ であり、この式のｙに１０を代入すればＡ君がＥ市に５０分後、すなわち１０時５０分に到着することが分かる。つまりｘの変域は $0 \leq x \leq 50$ である。

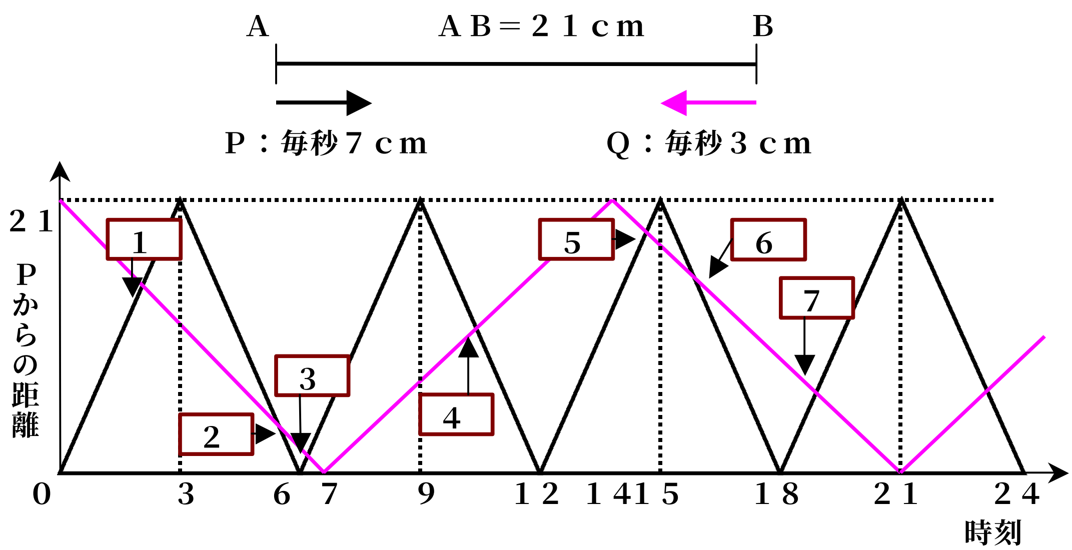
（２）　Ｂさんは時速３０ｋｍ＝分速０．５ｋｍなので、（２４，０）を通り傾き０．５の直線の式は $y = 0.5x - 12$ となる。この式と直線 $y = 0.2x$ を連立（代入法が望ましい）すれば、交点は（４０、８）となる。つまりＤ町から８ｋｍの地点で追い越す。



（例題）下図のように２１ｃｍはなれた線分ＡＢ間を動点Ｐ，Ｑが往復運動することを考える。点Ｐは時刻０に点Ａを出発し毎秒７ｃｍで永久に静止せずに動くものとする。点Ｑは時刻０に点Ｂを出発し毎秒３ｃｍで永久に静止せずに動くものとする。各点ともＡないしＢに着いたら休まず反転し運動を続ける。次の各問いに答えよ。

（１）　時刻２００秒までに、点Ｑは、何回点Ｐとすれ違い、何回点Ｐに追い抜かれたか。

（２）　点Ｑが１６７回目に点Ｐとすれ違ったときの、時刻及び両点の位置は点Ａからどれだけの距離があるかを求めよ。



（答）こういう問題のときは、必ずダイヤグラムを書くこと。全てが解決する。３と７の最小公倍数は２１より、２１秒後まで考えれば、その後は事象が繰り返す。（但し出発位置は逆転するので、完全に同じ事象の繰り返しの周期は４２秒である。）

　下の表のように、ダイヤグラムを参考に点Ｐと点Ｑの追い抜きとすれ違いの発生時刻をまとめる。（両点の直線の式を連立して解けばよい。）

事象	事象内容	点Ｐの直線式	点Ｑの直線式	事象発生時刻
1	すれ違い	$y=7x$	$y=-3x+21$	$x=21/10=2.1$
2	追い抜き	$y=-7x+42$	$y=-3x+21$	$x=21/4=5.25$
3	すれ違い	$y=7x-42$	$y=-3x+21$	$x=63/10=6.3$
4	すれ違い	$y=-7x+84$	$y=3x-21$	$x=21/2=10.5$
5	すれ違い	$y=7x-84$	$y=-3x+63$	$x=147/10=14.7$
6	追い抜き	$y=-7x+126$	$y=-3x+63$	$x=63/4=15.75$
7	すれ違い	$y=7x-126$	$y=-3x+63$	$x=189/10=18.9$

（1）　２００を２１で割ると商は９、あまりは１１。従って９回上記の７度の発生事象（すれ違い５回、追い抜き２回）が繰り返し、残りの１１秒間を考えると、１０．５＜１１＜１４．７より事象１から４（すれ違い３回、追い抜き１回）まで発生する。

追い抜き：２×９＋１＝<u>１９回</u>

すれ違い：５×９＋３＝<u>４８回</u>

（2）　２１×２＝４２秒間をグループ単位と見ると、その中で５×２＝１０回両点のすれ違いが発生する。１６７を１０で割ると商は１６、あまりは７。従って７－５＝２（「すれ違い」のはじめから２番目の意味）より、事象３が発生していることがわかる。上の表の裏返しで発生していることに注意すれば、Ｐ：$y=7x-42$ とＱ：$y=-3x+21$ の連立解 $y=21/10=2.1$ は点Ａではなく点Ｂからの距離を表している。以上を踏まえれば答は次のようになる。

事象発生時刻：４２×１６＋２１＋６．３＝<u>６９９．３秒</u>

点Ａからの距離：２１－２．１＝<u>１８．９ｃｍ</u>

９．４　一次関数で表現される自然現象、社会現象

最もよく出題されるのが水の給水、排水である。例えば給水管Ａは毎分２リットルの給水、給水管Ｂは毎分３リットルの給水、排水管Ｃは毎分４リットルの排水をするとすれば、Ａ＋Ｃでは２－４＝－２で毎分２リットルの排水、Ａ＋Ｂでは２＋３＝５で毎分５リットルの給水能力を持つことになる。例えば直方体の水槽にすでに２０リットルの水があってＡ管とＣ管を同時に使えばｘ分後の水量は $y=-2x+20$ で表せることになる。

- 変化の割合が＋（水位増加）なのか－（水位減少）なのかに特に注意すること。
- 縦軸ｙが容積なのか水位の高さなのかも注意すること。
- 容器に「敷居（しきい）」がある場合は、敷居の高さになるととなりの部分に水があふれていくので水位に変化が生じないし、風呂場のように段差がある場合は、一定量の水を給水したとしても水位の変化率は容積に応じて折れ線上に変化していくなど、当然の自然現象だが注意して解くこと。

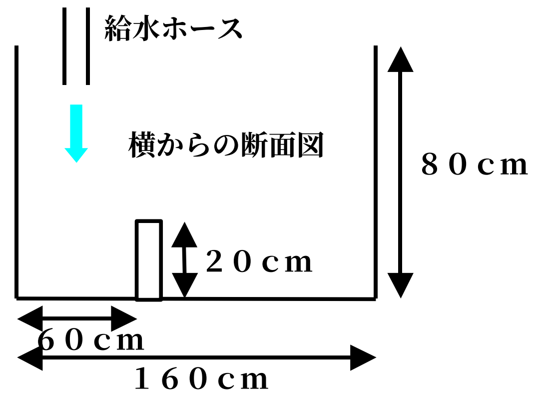
（例題）下図のような敷居のある空の水槽に給水していくと、左半分側の水位の時間変化がグラフのようになった。ホースからの給水率ははじめ毎分５０リットルで途中から毎分８０リットルに変わり、１０分で満水になったとする。敷居の幅および時間ｂ及びｃの値（何分何秒）を求めよ。

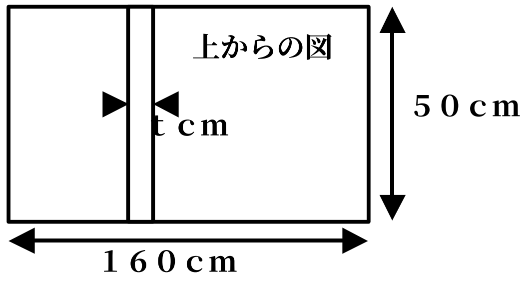
（略解）時間ｂに左半分の水位が敷居の高さまで達すると、右半分側に水があふれて３分後に右半分も敷居の高さに達することが分かる。また時間ｃに給水率が変化している。

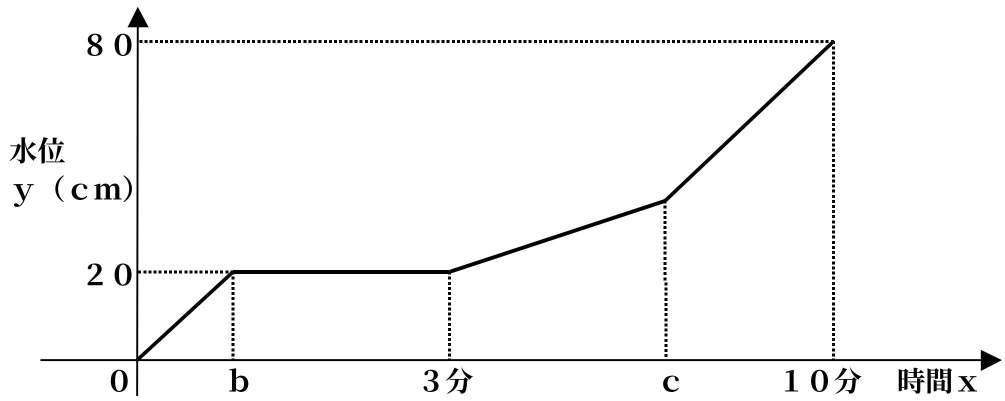
$(60\times50\times20)\div(50\times1000)=1.2\Rightarrow$ ｂ＝１分１２秒

$d\times50\times20=50\times1000\times(3-1.2)\Rightarrow d=90\Rightarrow t=160-(60+d)\Rightarrow$ ｔ＝１０（ｃｍ）

$50\times(c-3)+80\times(10-t)=160\times50\times(80-20)\div1000\Rightarrow c=17/3\Rightarrow$ ｃ＝５分４０秒







それ以外の代表的自然現象としては、

- 高度と気温の関係：　（気温）＝（海面上の気温）－（比例定数）・（高度）
- ばねの伸び（フックの法則）：
  （ばねの伸び）＝（ばねの自然長）＋（比例定数）・（錘の重さ）
- ろうそくの長さ：　（燃え残りの長さ）＝（元の長さ）－（比例定数）・（時間）
- 音速と気温の関係：　（音速）＝（摂氏０度での音速）＋（比例定数）・（温度）

また典型的な社会現象としては、

- 電話、水道、電気、ガスなどのライフラインの使用料金：
  （使用料金）＝（固定料金）＋（比例定数）・（使用時間ないし使用量）

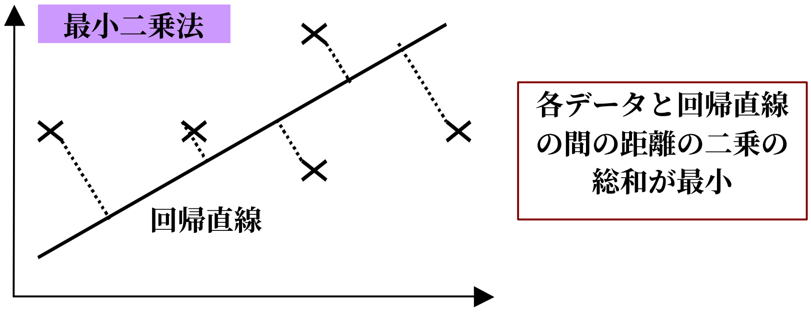
などが挙げられる。

（例題）地上からの高さが１０ｋｍぐらいまでの気温は、高さの増加に伴って一定の割合で低くなっていく。地上１ｋｍの高さの気温が摂氏２０度、地上５ｋｍの高さの気温が摂氏－４度であるとき、富士山の山頂の気温を小数第一位まで求めよ。

（略解）高度をｘ（ｋｍ）、気温をｙ（摂氏度）として、２点（１，２０）（５、－４）を通る直線の式を求めると、$y=-6x+26$ を得る。富士山の山頂高度ｘ＝３．７７６（ｋｍ）を代入してｙ＝３．３（摂氏度）を得る。

９．５　統計データの回帰分析、パターン認識、クラスタリング

実験データには必ず様々な誤差（読み取り誤差、測定機器の内在誤差、周辺環境要因による誤差混入など）が含まれる。あらかじめ２つのデータに特定の関数モデルで表現できる関係があると分かっている場合、実験で得られたデータ分布から統計的に最も確からしい関数パラメタを決定する方法に「最小二乗法（最小自乗法）」が知られている。もしその関数モデルが一次関数の場合、下図のように各データと求める直線との距離（点から直線まで下ろした垂線の長さ）の二乗の全データに対する総和が最小になるように、直線を引くのが最もよいとされている。この直線を「回帰直線」という。



また新製品に対する消費者の年齢の影響や化粧品の使用頻度別効果を調べるといったときに、相関性の解析を行うつまり２つのデータ（使用頻度と効果）の間に統計的に有為な関係があるかを調べる場合に、相関係数という指標を用いる場合がある。

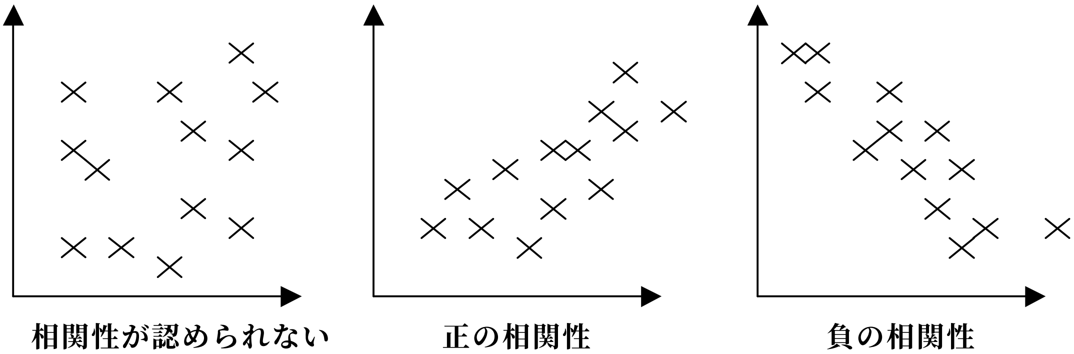
n 組のデータ $(x_i, y_i)(i = 1,2,\cdots,n)$ の相関係数 **r** は次式で与えられる。

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

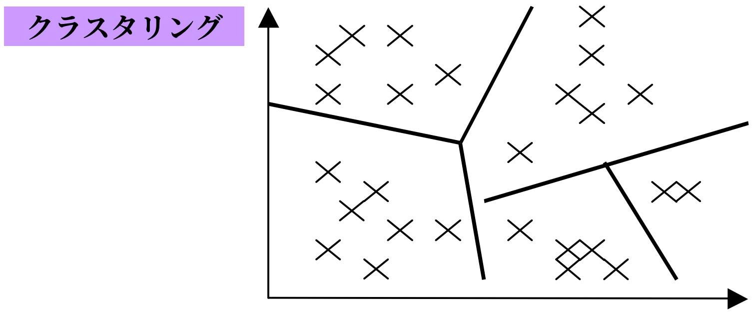
$$S_x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2; \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2; \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})$$

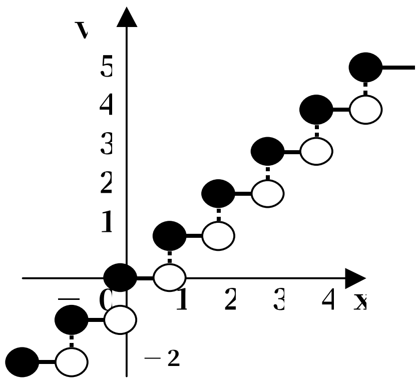


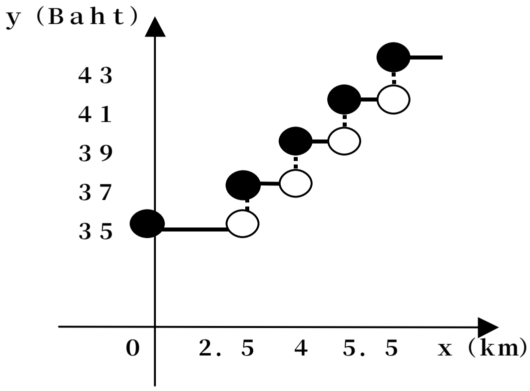
またデータ分布をいくつかのグループに分類（クラスタリング）することで、データの傾向性を把握する場合も多い。例えば成人男子の身長と体重の分布を痩身型、正常、肥満の３つのグループに分類することは意味がある。クラスタリングには様々なアルゴリズムが知られているが、超平面（２次元データなら直線）でデータ空間をクラスタリングする線形分類は非常によく利用されているものである。



９．６　階段関数の表現：ガウス記号

任意の実数ｘに対して、ｘを越えない最大の整数を$[x]$と表記する。この記号をガウス記号と呼ぶ。例えば$[\pi]=3, [-2.4]=-3$となる。ガウス関数$y=[x]$を下図のような階段型関数として定義できる。





ガウス関数　$y=[x]=n \quad (n \le x < n+1)$

走行距離対応メーター料金

$$y=\begin{cases} 35 & (0 \le \mathrm{x} < 2.5) \\ 37+2\left[\dfrac{x-2.5}{1.5}\right] & (x \ge 2.5) \end{cases}$$

（例題１）任意の正の実数ｘに対してその小数点以下第一位を四捨五入した整数をｙとする。ｙをｘの関数としてガウス記号を用いて表現せよ。

（答）$y=[x+0.5] \quad (\mathrm{x}>0)$

（例題２）タイのある地域のタクシー料金は、最初の２．５ｋｍ未満は３５バーツ、その後は走行距離１．５ｋｍごとに２バーツ加算されるという。(実際と異なると思うがあしからず。)

（１）　走行距離２０ｋｍのときの料金はいくらか。
（２）　料金が９９バーツのときの走行距離の範囲を求めよ。
（答）走行距離をｘ（ｋｍ)、料金をｙ（バーツ）とすると、

$$y=\begin{cases}35 & (0\le x<2.5)\\ 37+2\left[\dfrac{x-2.5}{1.5}\right] & (x\ge 2.5)\end{cases}$$

で表せる。グラフで書くと上図のようになる。
（１）　走行距離２０ｋｍのとき、$[(20-2.5)/1.5]=[11.66\cdots]=11$ より $y=37+2\times 11=59$
つまり料金は５９バーツとなる。
（２）　走行距離２．５ｋｍ以上での黒点（左端点）は直線

$$y=37+2\cdot\frac{x-2.5}{1.5}=\frac{4}{3}x+\frac{101}{3}$$

上にあるので、 $y=99$ を代入して、 $x=(3\times 99-101)/4=49$
従って走行距離の範囲は $49\le x<50.5$ となる。

９．７　一次関数以外の関数と一次関数の融合問題

原点を頂点に持つ二次関数については中３で、一般的な二次関数やｎ次関数、その他の代数関数については高校以降で履修する。ここでは中１で学んだ反比例関数（双曲線関数）と直線との融合問題を説明するに留める。

（例題）変域ｘ＞０で定義された関数 $y=8/x$ のグラフ上を動く点Ｐがある。また変域ｘ＜０で定義された関数 $y=-4/x$ のグラフ上に点Ｑがあり、ＱはＰＱがつねにｘ軸に平行であるように動くとする。ＯＱの中点をＭとし、ＰＭとｙ軸の交点をＲとするとき、三角形ＯＰＲの面積は点Ｐの位置に寄らず一定であることを示せ。
（略解）ＰとＱのｙ座標が等しいことに着目し、その値をｔ（但しｔ＞０）とおくと、Ｐ $(8/t,t)$、Ｑ $(-4/t,t)$、Ｍ $(-2/t,t/2)$ と表せる。直線ＰＭの式は $y=(t^2/20)x+3t/5$ と表せるので、Ｒ $(0,3t/5)$ となる。三角形ＯＰＲの面積は $(3t/5)\times(8/t)\div 2=12/5$ となり、ｔによらず一定であることが示された。

１０．　格子点問題：合同式とディオファントス型不定方程式の整数解

ｘｙ座標上の点で、<u>ｘ座標及びｙ座標ともに整数</u>で表される点を総称して「格子点」という。格子点問題、あるいはディオファントス型やペル型の不定方程式の整数解問題は、数学の１分野である「整数論」に関わるので、高校入試でも大学入試でもよく扱われるものである。本節では、中学高校ではあまり体系的に扱われていない不定方程式の整数解問題を、高校で履修する線形代数の手法できちんと数学的に論じてみる。整数の持つ美しくも不思議な世界を体験してほしい。

１０．１　最大公約数とユークリッドの互除法

整数ｘを０でない整数ｙで割ったときの商を $Qut(x,y)$、余りを $Mod(x,y)$ と書くことにする。すなわち、

$$Mod(x,y)=x-Qut(x,y)\times y$$

という関係が成り立つとする。

２個の整数ｘ、ｙの最大公約数を$Gcd(x, y)$とかく。最大公約数とはご存知の通り、$x = Ga, y = Gb$ を満たす整数 a, b が存在するような最大の整数Ｇを表している。また $Gcd(0,0) = 0$ と定める。３個の整数ｘ、ｙ、ｚの最大公約数は$Gcd(Gcd(x, y), z)$として求めればよい。４個以上でも同様である。
負でない整数ｘ、ｙの最大公約数は、「ユークリッドの互除法」と呼ばれる統一的な再帰型アルゴリズム（有限回の演算により答を求めることが出来る計算手続きのこと）によって機械的に求めることが出来る。

<u>ユークリッドの互除法</u>
負でない整数ｘ、ｙの最大公約数は

$$Gcd(x, y) = \begin{cases} x & (\text{if} \ \ y = 0) \\ Gcd(y, Mod(x, y)) & (\text{if} \ \ y \neq 0) \end{cases}$$

を繰り返し用いることで（再帰型アルゴリズム）有限の演算回数で算出できる。

ｘ、ｙが約数Ｇを持てば、$Mod(x, y) = x - Qut(x, y) \times y$ より $Mod(x, y)$ も約数Ｇをもつことから、上記の式の正しさが説明できる。
この方法を使うと、例えば、

- １１と７の最大公約数：$Gcd(11,7) = Gcd(7,4) = Gcd(4,3) = Gcd(3,1) = Gcd(1,0) = 1$
- ３５と２１の最大公約数：$Gcd(35,21) = Gcd(21,14) = Gcd(14,7) = Gcd(7,0) = 7$
- １２０と３０の最大公約数：$Gcd(120,30) = Gcd(30,0) = 30$

のように、求めることが出来る。

１０．２　合同式

二つの数ｘ、ｙの差が数ｍの整数倍であるとき、

$$x \equiv y \qquad (\text{mod } m)$$

と書き、ｘとｙはｍを法として合同である、という。例えば、$23 \equiv 51 \ (\text{mod } 7)$である。このような式を合同式という。通常ｘ、ｙ、ｍはみな整数である。
また合同式で表現される方程式は一般に不定方程式（解が一つに定まらない方程式）になるが、不定方程式の整数解（解が整数になる）や有理解（解が有理数すなわち分子と分母が互いに素な整数を持つ既約分数を求める問題は古くから数学者の興味を引いてきた。
例えば一次不定方程式$x \equiv 2 \ \ (\text{mod } 5)$の整数解は、５で割ったとき２余る整数であるので、一般解は整数ｎを用いて $x = 2\text{n} + 5$ と表せる。

１０．３　ディオファントス型不定方程式における整数解の存在性

一般の一次不定方程式

$$ax \equiv c \quad (\text{mod } b) \qquad \text{すなわち} \qquad ax + by = c$$

を「ディオファントス型不定方程式」とよぶ。通常a, b, cともに整数であるとする。
この不定方程式の整数解はつねに存在するとは限らない。例えば、$2x + 4y = 1$に整数解がないのは明らか（左辺は偶数、右辺は奇数）だし、$3x + 6y = 7$に整数解がないのも明らか（左辺は３の倍数、右辺は３の倍数でない）である。しかし、$c = Gcd(a, b)$の場合には以下のように整数解が存在することが証明できる。

命題１０－１
互いに素かつ０でない整数a,bに対して、不定方程式$ax+by=1$を満たす整数解は、必ず存在する。

例えば$3x-2y=-1$は$3(-x)+2y=1$と変形すれば上式に帰着できるので、この命題を証明するとき、a,bともに正としても一般性を失わない。
（背理法による証明）
$b=1$の場合、本式は$y \equiv c \pmod a$に変形でき、無限個の整数解$(x, c-ax)$が存在する。
$b \geq 2$のとき、b個の整数$a,2a,........,ba$をbで割った余りは全て異なる。なぜならもし、このb個のうちの２数maとnaを、bで割った余りが等しいとすると、$ma-na=(m-n)a$をbで割った余りは０になり割り切れることになるが、$0<|m-n|<b$かつa,bは互いに素であるので矛盾が生ずるからである。
ゆえに、b個の整数$a,2a,........,ba$の中にはbで割ると余りが１になるものが必ず存在する。それをkaとすると、kaをbで割った商を$Qut(ka,b)=l$とおけば、$ka=lb+1$と書け、解$(k,-l)$は不定方程式$ax+by=1$の整数解となり、存在性が証明された。

命題１０－１をもとに、次のアルゴリズムを得ることが出来る。

アルゴリズム１０－１
互いに素かつ正の整数a,bに対して、不定方程式$ax+by=1$を満たす整数解の１つを決定するアルゴリズムとして、以下の手順を与える。
- $b-1$個の整数$a,2a,........,(b-1)a$のそれぞれを順にbで割っていき、余りが１になるものを探す。
- それをkaとし、kaをbで割った商を$Qut(ka,b)=l$とおく。
- 解$(k,-l)$は不定方程式$ax+by=1$の整数解である。

（例題）不定方程式３ｘ＋５ｙ＝１の整数解の１つを、アルゴリズム１０－１を用いて決定せよ。
（答）３＜５より５ｙ＋３ｘ＝１と考えた方が、計算量が少なくて済む。
２個の整数５及び１０を３で割り、余りが１になるのは２・５＝１０なので、１０を３で割った商は３であるから、（ｙ，ｘ）＝（２，－３）つまり（ｘ，ｙ）＝（－３，２）が、解として選ばれる。

中学生の段階では、このアルゴリズム１０－１と１０．４で述べるアルゴリズム１０－３を知っていれば十分である。

命題１０－２
互いに素かつ０でない整数a,bに対して、適当な整数ｘ及びｙを選ぶことによって、$ax+by$は任意の整数値を取ることが出来る。

（証明）
命題１０－１の証明で得た不定方程式$ax'+by'=1$の整数解$(k,-l)$に対して、任意の整数cを選び、$x=ck,\ y=-cl$とおけばx,yともに整数で$ax+by=c$となり、題意は証明された。

この命題は非常に応用性が広い。次のように言い換えて表現することも出来る。

命題１０－２の系
互いに素かつ０でない整数a,b及び任意の整数cに対して、不定方程式$ax+by=c$を満たす整数解は、必ず存在する。

また命題１０－１から次の定理を証明することも出来る。

命題１０－３
任意の整数a,bに対して、不定方程式$ax+by=Gcd(a,b)$を満たす整数解は、必ず存在する。

（証明）
$a=0$の場合は$Gcd(a,b)=b$となり$y=1$、$b=0$の場合は$Gcd(a,b)=a$となり$x=1$、$a=b=0$の場合は、解は不定になる。
それ以外の場合$Gcd(a,b)\neq 0$になり、$a=Gcd(a,b)\cdot a'$及び$b=Gcd(a,b)\cdot b'$を満たす互いに素な整数a',b'が存在する。このとき不定方程式$ax+by=Gcd(a,b)$は$a'x+b'y=1$と変形できる。従って命題１０－１より不定方程式$a'x+b'y=1$は必ず整数解$(k',-l')$をもつので、不定方程式$ax+by=Gcd(a,b)$も整数解$(k',-l')$をもつ。

１０．４　ディオファントス型不定方程式の整数解決定のアルゴリズム

１０．１で述べたユークリッドの互除法の再帰型アルゴリズムは、以下のように線形代数を用いて表現することができ、その過程の中で不定方程式$ax+by=Gcd(a,b)$を満たす整数解(x,y)を同時決定できることが分かる。

ユークリッドの互除法とディオファントス型不定方程式の関係性
２数a,bの最大公約数$Gcd(a,b)$を求めるユークリッドの互除法は、$a_0=a, b_0=b$から出発して、線形漸化式

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_k \\ r_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_k \\ a_k - q_k \cdot b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = Q_k \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$q_k = Qut(a_k, b_k);\quad r_k = Mod(a_k, b_k)$$

を、$b_N=0$になるまで$k=0,1,\ldots,N-1$と繰り返しN回用いることで、$Gcd(a,b)=a_N$として最大公約数を（有限演算回数N回で）算出するアルゴリズムである。
このとき、

$$Gcd(a,b) = (1,0)\cdot \prod_{k=0}^{N-1} Q_k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (1,0)\cdot Q_{N-1}\cdot Q_{N-2}\cdots Q_1 \cdot Q_0 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と書けるので、

$$(x,y) = (1,0)\cdot \prod_{k=0}^{N-1} Q_k = (1,0)\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{N-2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$Gcd(a,b) = (x,y)\cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ax+by$$

となり、２数a,bの最大公約数$Gcd(a,b)$を求めるユークリッドの互除法を用いて不定方程式$ax+by=Gcd(a,b)$を満たす整数解(x,y)を決定できることが分かる。

線形代数をまだ履修していない中学生や高校１年生には上記の式は分かりづらいと思う。そこで、 $k = 1,2,....,N$ **に対して、**

$$\begin{pmatrix} T_{k,1} & T_{k,2} \\ T_{k,3} & T_{k,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{k-1,1} & T_{k-1,2} \\ T_{k-1,3} & T_{k-1,4} \end{pmatrix}$$

なる行列Ｔを用いて、以下のような一次の漸化式表現に書き下す。

<u>アルゴリズム１０－２</u>

不定方程式 $ax + by = Gcd(a,b)$ **を満たす整数解の１つ** (x_0, y_0) **の決定は、以下の８次の漸化式を解くことで得られる。**

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \\ q_0 = Qut(a_0, b_0) \\ r_0 = Mod(a_0, b_0) = a_0 - q_0 \cdot b_0 \\ T_{0,1} = 0 \\ T_{0,2} = 1 \\ T_{0,3} = 1 \\ T_{0,4} = -q_0 \end{cases}$$

から出発して、漸化式

$$\begin{cases} a_k = b_{k-1} \\ b_k = r_{k-1} \\ q_k = Qut(a_k, b_k) \\ r_k = Mod(a_k, b_k) = a_k - q_k \cdot b_k \\ T_{k,1} = T_{k-1,3} \\ T_{k,2} = T_{k-1,4} \\ T_{k,3} = T_{k-1,1} - q_k \cdot T_{k-1,3} \\ T_{k,4} = T_{k-1,2} - q_k \cdot T_{k-1,4} \end{cases}$$

を、 $b_N = 0$ **になるまで繰り返し** $k = 1,2,....,N$ **とＮ回用いることで、**

$$(x_0, y_0) = (T_{N-1,1}, T_{N-1,2})$$

と得られる。

またこのアルゴリズム１０－２と命題１０－２によって、互いに素かつ０でない整数 a,b **及び任意の整数** c **に対して、不定方程式** $ax + by = c$ **を満たす整数解の１つ** (x_0, y_0) **を見つけることが出来たので、以下のアルゴリズム１０－３によって不定方程式** $ax + by = c$ **を満たす整数解の一般解（無限個）を統一的に表現し計算することが出来る。**

アルゴリズム１０－３

互いに素かつ０でない整数a,b及び任意の整数cに対して、不定方程式$ax+by=c$を満たす整数解は、アルゴリズム１０－２と命題１０－２によって整数解の一つ(x_0,y_0)を見つけることが出来れば、全ての整数解は、漸化式

$$\left.\begin{aligned} x_n &= x_0 + n\cdot b \\ y_n &= y_0 - n\cdot a \end{aligned}\right\} \qquad (n = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\cdots)$$

で与えられる。

（証明）$ax_n + by_n = a\cdot(x_0 + n\cdot b) + b\cdot(y_0 - n\cdot a) = ax_0 + by_0 = c$**より、上記漸化式で得られる整数解は不定方程式**$ax+by=c$**を満たす。**

　a,b**は互いに素であるから、任意のｎに対し格子点**(x_n,y_n)**と格子点**(x_{n-1},y_{n-1})**を結ぶ線分の間には格子点は存在しない。なぜならこの線分（両端を除く）上のｘ座標が整数の点**

$$\left(x_{n-1} + \mathrm{sgn}(b)\cdot j,\, y_{n-1} - \mathrm{sgn}(b)\cdot\frac{a}{b}\cdot j\right) \qquad (\mathrm{j} = 1,2,3\ldots,\mathrm{b}-1)$$

$$\mathrm{sgn}(b) = \begin{cases} 1 & (\text{if } b > 0) \\ 0 & (\text{if } b = 0) \\ -1 & (\text{if } b < 0) \end{cases}$$

を考えるとa/b**は整数値をとることが出来ないので、ｙ座標が整数の点になれないからである。従って上記漸化式が全ての解であることが示された。**

（例題）不定方程式２２ｘ＋１４ｙ＝２の整数解の１つを、アルゴリズム１０－２を用いて決定し、アルゴリズム１０－３を用いて整数解を全て求めよ。

（答）２２と１４に対してユークリッドの互除法よりＮ＝４で最大公約数２を得られる。従って２２と１４をその最大公約数２で割った互いに素な整数１１と７を用いて作った不定方程式１１ｘ＋７ｙ＝１は２２ｘ＋１４ｙ＋２と同一の整数解をもつ。そこで不定方程式１１ｘ＋７ｙ＝１に対しアルゴリズム１０－２を用いて以下のように展開していくと、

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \mathrm{k}=0 & & \mathrm{k}=1 & & \mathrm{k}=2 & & \mathrm{k}=3 & & \mathrm{k}=4 \\ \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ q_k \\ r_k \\ T_{k,1} \\ T_{k,2} \\ T_{k,3} \\ T_{k,4} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ \underline{\underline{2}} \\ \underline{\underline{\underline{-3}}} \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \end{array}$$

より、$(x_0,y_0) = (2,-3)$**を得る。従ってアルゴリズム１０－３より、整数一般解**

$$\left.\begin{array}{l} x_n = 7n+2 \\ y_n = -11n-3 \end{array}\right\} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots)$$

を得る。

（例題）直線３ｘ＋５ｙ＝９７上の格子点のうち、ｘｙ両座標の値とも正の整数のものはいくつあるか。
（略解）
ステップ①：３と５は互いに素な整数なので、３ｘ＋５ｙ＝１の整数解の１つをアルゴリズム１０－１によって求めると、（－３，２）となる。
ステップ②：命題１０－２より３ｘ＋５ｙ＝９７の整数解は（－２９１，１９４）となる。
ステップ③：アルゴリズム１０－３により一般解は

$$\left.\begin{array}{l} x_n = 5n-291 \\ y_n = -3n+194 \end{array}\right\} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots)$$

となる。従って $x_n > 0, y_n > 0$ **の格子点は、不等式**

$$58\frac{1}{5} < n < 64\frac{2}{3}$$

の中の整数の個数であるから<u>６個</u>となる。
（別解）直接しらみつぶし的に調べていって（４，１７）を初期解に選ぶ方が解はきれいになる。このときアルゴリズム１０－３により一般解は、

$$\left.\begin{array}{l} x_n = 5n+4 \\ y_n = -3n+17 \end{array}\right\} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots)$$

となり、従って $x_n > 0, y_n > 0$ **の格子点は、不等式**

$$-\frac{4}{5} < n < 5\frac{2}{3}$$

の中の整数の個数であるから<u>６個</u>となる。

１０．５　オイラーの関数

オイラーの関数 $\mathrm{j}(x)$ **とは、正の整数ｘに対し、** $k = 1, 2, \ldots., x$ **のｘ個の整数の中でｘと互いに素、すなわち、** $Gcd(k, x) = 1$ **な整数の個数を与える。３以上の整数ｘに対し、** $\mathrm{j}(x)$ **は偶数である。例えば、** $\mathrm{j}(1) = 1, \mathrm{j}(2) = 1, \mathrm{j}(3) = 2, \mathrm{j}(4) = 2, \mathrm{j}(5) = 4, \mathrm{j}(6) = 2, \mathrm{j}(7) = 6$ **となる。ｘが素数のとき、当然** $\mathrm{j}(x) = x - 1$ **となる。**

次の命題が知られている（証明は省く。）

> **<u>命題１０－４</u>**
> **２つの正の整数** a, b **が互いに素、すなわち、** $Gcd(a, b) = 1$ **のとき、**
> $$a^{\mathrm{j}(b)} \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\, b)$$
> **で与えられる。**

この命題を用いれば、次の命題１０－５がすぐ得られる。この命題１０－５を用いれば、互いに素かつ０でない整数a,bに対して不定方程式$ax+by=1$を満たす整数解の１つを得るに際して、累乗を求める高速アルゴリズムを用いることにより、正解を得るまでの演算回数を他の方法に比べかなり減らすことが出来るといわれている。

命題１０－５
互いに素かつ０でない整数a,bに対して、不定方程式$ax\equiv 1 \pmod{b}$を満たす整数解の１つは、$x=a^{\varphi(b)-1}$で与えられる。

（例題）４ｘ＋７ｙ＝１の整数解の１つを、命題１０－５を用いて算出せよ。
（答）$x=4^{\varphi(7)-1}=4^{6-1}=4^5=2^{10}=1024$をえる。このとき、$y=-7^2\cdot 5=-585$となり、$(x,y)=(1024,-585)$を得る。

１１．　線形計画法

経済学では通常、人や経済媒体は自分の世界観の中で（但し自分の世界観は通常全体の世界観とは異なる）最も合理的である（限定合理性）と判断した意思決定行動をするものと仮定する。例えば購入したい服がたくさんあるけど資金に制約がある場合、セールや流行などの入手可能な情報なども考慮しながら、どこの店で何を買うか判断するというように、様々な制約（例えば資金や店の所在地など）のなかでその制約をできるだけ満足する範囲内で様々な評価指標（例えば自己の満足度、総購入費用、商品探索時の疲労度など）をできるだけ最大化（最小化）するように意思決定することは合理的といえよう。現時点で最適と思われる行動が、時間の変化とともに最適でなくなる場合もあり、製造業における中長期の生産計画などでは環境の時間変化もモデル化して最適な意思決定を判断することが要求される。

応用数学では、このような問題を総称して「数理計画法」と呼んでいる。その中で最も広く利用されているのが「線形計画法（ＬＰ）」である。線形計画法では、制約条件が全てｎ元１次の不等式で記述され、その下でｎ個の未知変数をもつ１次式で与えられた評価関数を最大化するように、ｎ個の変数を最適決定する。コンピュータの演算速度の進化、プログラミング技術や計算量理論の発展により、未知変数が数百個から数万個でも解くことが出来るようになっている。応用分野は、理工学系や製造分野のみならず、金融や経済、経営、政策などでも幅広く使われている。

（例題）（典型的な線形計画法の例題）
ある工場は二種類の製品Ａ，Ｂを製造している。製品Ａを１トン生産するには、２トンの材料、４時間の労働及び３時間の機械の稼動を必要とし、製品１トンあたりの利益は２千ドルである。製品Ｂを１トン生産するには、５トンの材料、３時間の労働及び１時間の機械の稼動を必要とし、製品１トンあたりの利益は１千ドルである。材料、労働、機械の稼動が一定の割合で増加すると、生産高及び利益が比例的に増大するものとする。材料、労働、機械の稼動の最大使用頻度が、それぞれ３００トン、２４０時間、１５０時間であるとき、各製品を何トンずつ生産すれば収益は最大になるか、決定せよ。

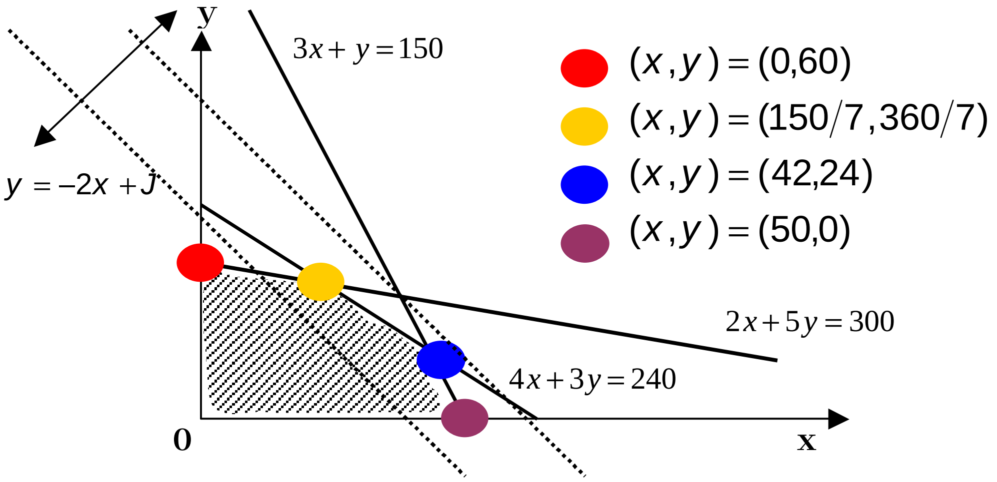
（解）製品Ａをｘトン、製品Ｂをｙトン生産するとして、この問題は次式で定式化できる。
最大化すべき評価関数　　　$J=2x+y\to \max$

制約条件	**材料使用量**	$2x+5y \le 300$
	労働時間	$4x+3y \le 240$
	機械稼働時間	$3x+y \le 150$

下のグラフより最適解の候補は５角形の４つの頂点に限定される。（未知数次元の多い線形計画法の問題でも、超平面間の交点集合の部分集合を最適解の候補にすることで、解探索の計算量を削減するアルゴリズムが使われる。）

$$(x, y) = (0, 60) \Rightarrow J = 60$$
$$(x, y) = (150/7, 360/7) \Rightarrow J = 660/7$$
$$(x, y) = (42, 24) \Rightarrow J = 108$$
$$(x, y) = (50, 0) \Rightarrow J = 100$$

従って、製品Ａを<u>４２トン</u>、製品Ｂを<u>２４トン</u>生産すれば、純益は<u>１０万８千ドル</u>で最大になる。



１２．　図形の移動と線形変換・アフィン変換：一次関数とのアナロジー

１２．１　図形の対称性

自然界にも装飾品や建築などの人工物にも対称性のある模様、形態は非常に多く、人間の美的センスを強く刺激する対称性の代表的なものに以下のものがある。

- **面対称：（例）平面鏡は実空間とバーチャル空間の間の面対称性をとりもっている。**
- **線対称：（例）正ｎ角形はその中心を通るｎ本の直線に関して線対称である。**
- **点対称：角度１８０度の回転対称性と言い換えられる。**
- **並進対称：「図形全体を一定の方向に一定の距離だけ平行移動してもその図形が全体と変わらない場合」　（例）結晶構造、原子構造。**
- **回転対称：「平面上で特定点Ｐのまわりにある定まった角度回転した場合、図形が元の図形と一致したように錯覚する（不変である）図形は、点Ｐに関してこの角度の回転対称性を持っているという。」　（例）円は任意の角度の回転対象性を持つ。**
- **伸張対称：「ある点を中心に図形上の全ての点を一斉に一定の倍率で拡大ないし縮小しても図形全体として不変である」　（例）螺旋、巻貝の模様、ＤＮＡ分子構造**

- **フラクタル：自己相似な図形　（例）木の枝、物質の界面構造**

１２．２　図形の対称性と一次変換・アフィン変換

１２．１で述べた図形の性質は、高校以降で線形代数を履修すれば数学的に論ずることができる。ここでは、中学生でも理解できる範囲で、線形変換及びアフィン変換で表現できる図形の移動及び対称性を簡単に説明する。

平面上の点Ｐ(x, y)がある変換Ｆによって点Ｑ(x', y')に移動するとき、

$$P(x, y) \xrightarrow{F} Q(x', y')$$

と表現し、点Ｑ(x', y')をＦによる点Ｐ(x, y)の像という。通常Ｆを定義（表現）するのに、

$$\begin{cases} x' = g(x, y) \\ y' = h(x, y) \end{cases}$$

が与えられる場合が多い。

とくに、変換Ｆを表す式が

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{あるいは行列を用いて} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のように、x', y'がそれぞれ定数項をもたない、x, yの１次式で表されるとき、この変換Ｆを一次変換という。一次変換の式と比例関数$y = ax$を表す式の類似性（アナロジー）に気づくと思う。一次変換の行列Ａは比例関数の変化の割合aに対応している。

また変換Ｆを表す式が

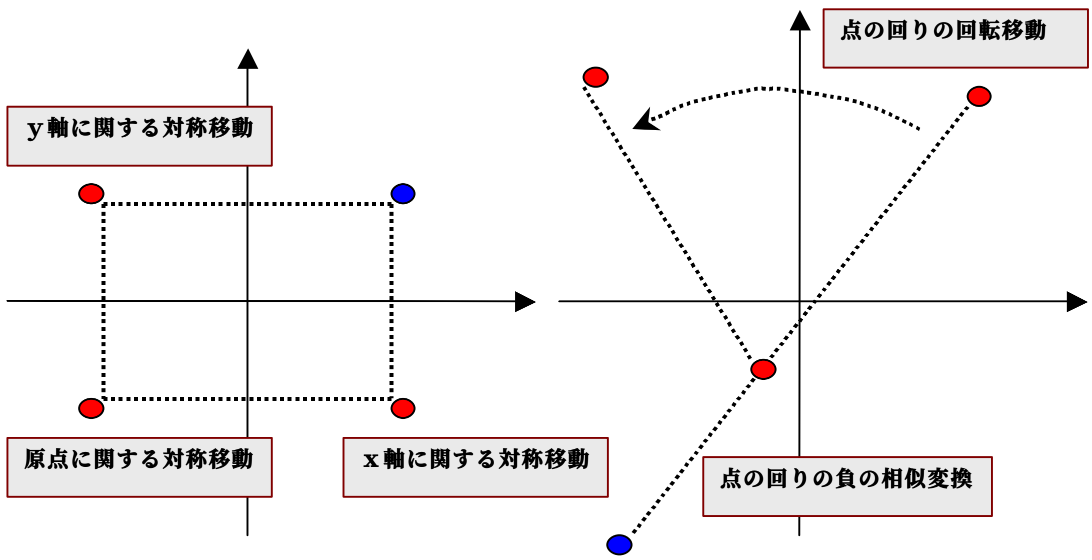
$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} \quad \text{あるいは行列を用いて} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

のように、x', y'がそれぞれ定数項をもつ、x, yの１次式で表されるとき、この変換Ｆをアフィン変換という。アフィン変換の式と一次関数$y = ax + b$を表す式の類似性（アナロジー）に気づくと思う。アフィン変換の行列Ａは一次関数の変化の割合（傾き）aに、定数ベクトル$(p, q)^T$は切片bに対応している。

以下に一次変換やアフィン変換で表現できる代表的な図形の移動における、変換の式をまとめる。

図形の移動	変換公式
並進（平行）移動 ｘ軸正方向にp ｙ軸正方向にq	$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$
ｘ軸に関する対称移動	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$
ｙ軸に関する対称移動	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

原点に関する対称移動	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$
点 P (r, s) に関する 対称移動	$\begin{cases} x' = -x + 2r \\ y' = -y + 2s \end{cases}$
直線 $Ax + By + C = 0$ に関する対称移動	$\begin{cases} x' = -Dx - Ey - FA \\ y' = -Ex + Dy - FB \end{cases}$ $D = \dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2};\ E = \dfrac{2AB}{A^2 + B^2};\ F = \dfrac{2C}{A^2 + B^2}$
原点を中心とする 相似比 k の相似変換	$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$
点 P (r, s) を中心とする 相似比 k の相似変換	$\begin{cases} x' = kx + (1-k)r \\ y' = ky + (1-k)s \end{cases}$
原点を中心とする 角 q の回転移動	$\begin{cases} x' = \cos q \cdot x - \sin q \cdot y \\ y' = \sin q \cdot x + \cos q \cdot y \end{cases}$
点 P (r, s) を中心とする 角 q の回転移動	$\begin{cases} x' = \cos q \cdot x - \sin q \cdot y + (1 - \cos q) \cdot r + \sin q \cdot s \\ y' = \sin q \cdot x + \cos q \cdot y - \sin q \cdot r + (1 - \cos q) \cdot s \end{cases}$



（例題）直線 $Ax + By + C = 0$ に関する対称移動の変換公式を導出せよ。
（略解）点 P (x, y) が直線 $Ax + By + C = 0$ に関する対称移動によって点 Q (x', y') に移ったとする。この線対称変換は、

「２点Ｐ，Ｑの中点$\left((x+x')/2,(y+y')/2\right)$は直線$Ax+By+C=0$上にある」

$$\Leftrightarrow\ A\cdot\left(\frac{x+x'}{2}\right)+B\cdot\left(\frac{y+y'}{2}\right)+C=0$$

「線分ＰＱと直線$Ax+By+C=0$は直交する」

$$\Leftrightarrow\ A\cdot(y-y')-B(x-x')=0$$

の２つの条件と同値である。従って連立方程式を解けば、アフィン変換

$$\begin{cases} x'=-Dx-Ey-FA \\ y'=-Ex+Dy-FB \end{cases}\quad \text{但し、}\ D=\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2};\ E=\frac{2AB}{A^2+B^2};\ F=\frac{2C}{A^2+B^2}$$

を得る。Ｃ＝０すなわち直線が原点を通る場合、一次変換となる。

（例題）直線$3x-4y+5=0$による点（２，７）の対称点をこの変換公式より求めよ。
（各自計算せよ。）

１２．３　変換により移動した図形の方程式

方程式$f(x,y)=0$ないし関数$y=f(x)$で表される図形は、変換Ｆに以下のような逆変換

$$\begin{cases} x=\tilde{g}(x',y') \\ y=\tilde{h}(x',y') \end{cases}$$

が存在すれば、変換Ｆによって

$$\text{方程式}\ f\left(\tilde{g}(x,y),\tilde{h}(x,y)\right)=0\quad \text{ないし}\quad \text{関数}\ \tilde{h}(x,y)=f\left(\tilde{g}(x,y)\right)=0$$

で表される図形に移動できる。

（例題）直線$3x-4y+5=0$と点（２，－３）に関して対称な図形の方程式を求めよ。
（略解）点（２，－３）に関する点対称変換で、直線$3x-4y+5=0$上の点Ｐ(x,y)が点Ｑ(x',y')に移ったとする。

$$\begin{cases} x'=-x+2\cdot 2=-x+4 \\ y'=-y+2\cdot(-3)=-y-6 \end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases} x=-x'+4 \\ y=-y'-6 \end{cases}$$

の関係をもとの直線$3x-4y+5=0$に代入すれば、

$$3(-x'+4)-4(-y'-6)+5=-3x'+4y'+41=0$$

となり、直線$\underline{3x-4y-41=0}$に移ることが分かる。(グラフ上で図形的に考えて確認せよ。)

（例題）直線$Ax+By+C=0$をｘ軸正方向にp平行移動してできる直線とｙ軸正方向にq平行移動してできる直線が、一致するための必要十分条件をもとめよ。
（略解）直線$Ax+By+C=0$上の点Ｐ(x,y)が点Ｑ(x',y')に移ったとする。

$$\begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=x'-p \\ y=y'-q \end{cases}$$

ゆえに、直線$Ax+By+C=0$をｘ軸正方向にp平行移動してできる直線の方程式は、

$$A(x-p)+By+C=Ax+By+(C-Ap)=0$$

であり、直線$Ax+By+C=0$をｙ軸正方向にq平行移動してできる直線の方程式は、

$$Ax+B(y-q)+C = Ax+By+(C-Bq)=0$$

である。ゆえに求める必要十分条件は、$\underline{Ap = Bq}$で与えられる。

（例題）直線$y=ax+b$をｘ軸正方向にp平行移動してできる直線とｙ軸正方向にq平行移動してできる直線が、一致するための必要十分条件をもとめよ。

（略解）直線$y=ax+b$をｘ軸正方向にp平行移動してできる直線の式は、

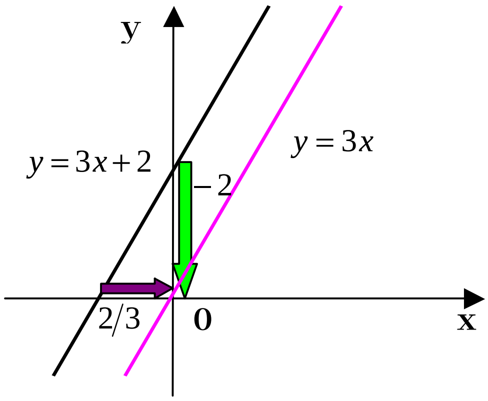
$$y=a(x-p)+b=ax+(b-ap)$$

であり、直線$y=ax+b$をｙ軸正方向にq平行移動してできる直線の式は、

$$y-q=ax+b \Rightarrow y=ax+(b+q)$$

である。ゆえに求める必要十分条件は、$\underline{q=-ap}$で与えられる。

（例えば$y=3x+2$は、右に$2/3$平行移動しても、上に－２（下に２）平行移動しても、$y=3x$へ移ることを確かめてみよ。）



１２．４　関数や変換の線形性

線形性というのは数学では非常に大事な概念である。

関数$f(x)$が線形性を持つことは、次式を満たすことと同値である。

$$k\cdot f(x)=f(kx)$$
$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$$

この概念は２次元、３次元、一般次元へと拡張でき、変換$F(\tilde{x})$が線形性を持つことは、次式を満たすことと同値になる。

$$k\cdot F(\tilde{x})=F(k\tilde{x})$$
$$F(\tilde{x}_1+\tilde{x}_2)=F(\tilde{x}_1)+F(\tilde{x}_2)$$

（例題）比例関数$y=ax$及び一次変換$\tilde{y}=A\cdot\tilde{x}$が線形性を持つことを確認せよ。

１２．５　線形性と非線形性

線形性とはすなわち１＋１＝２の世界、あるいは片方を３倍すると他方も３倍になる世界であり、それだけでは進化も発展もない安定な世界である。自然界の摂理は安定を与える「線形性」と不安定で進化能力を持つ「非線形性」が共存することで多様性をはぐくんでいるといえよう。１＋１が５にも－３にもなりうる「シナジー効果」や「カオス性」を持った「非線形」の世界が自然界および生物に内在するからこそ、ダイナミックで多様性に富み、環境の変化に応じて自らを進化させながら生き永らえることが出来るといえる。

１３．　高校履修範囲の公式

以下の公式は高校履修範囲になっているが、中３生でも三平方の定理を履修していれば導出可能であるので紹介する。証明は各自行ってみよ。

平行２直線 $y=ax+b_1$ と直線 $y=ax+b_2$ の間の距離
$h=\dfrac{\lvert b_2-b_1\rvert}{\sqrt{1+a^2}}$
平行２直線 $Ax+By+C_1=0$ と直線 $Ax+By+C_2=0$ の間の距離
$h=\dfrac{\lvert C_1-C_2\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
点 (x_P, y_P) と直線 $Ax+By+C=0$ の間の距離
$h=\dfrac{\lvert Ax_P+By_P+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$

またインター生などで三角関数を履修した者にとっては、以下の公式は大変便利である。証明は三角関数の加法定理を用いて各自試みよ。

直線 $y=ax+b$ とｘ軸のなす角 α
$\tan\alpha=a$
２直線 $y=a_1x+b_1$ と直線 $y=a_2x+b_2$ の間のなす角 θ
$\tan\theta=\tan\lvert\alpha-\beta\rvert=\lvert\tan(\alpha-\beta)\rvert=\left\lvert\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}\right\rvert=\left\lvert\dfrac{a_1-a_2}{1+a_1\cdot a_2}\right\rvert$ 例えば、$\begin{cases}\theta=45^\circ,135^\circ\Rightarrow\lvert\tan\theta\rvert=1\\\theta=30^\circ,150^\circ\Rightarrow\lvert\tan\theta\rvert=1/\sqrt{3}\\\theta=60^\circ,120^\circ\Rightarrow\lvert\tan\theta\rvert=\sqrt{3}\end{cases}$

高校で履修する解析幾何では、平面や空間上の直線や曲線あるいは平面や立体図形の表現法として、中学でも履修するｘｙ座標を使った座標幾何以外に、方向と大きさを同時に表現するベクトルや２次元の座標を１次元の数値に対応させて表現する複素幾何、パラメータ（媒介変数）を使った図形表現などを学習する。同一の事象を別の形式で表現するので、その対応性を理解することが重要になるのだが、その点については別の機会に紹介したい。