

中学 2 年

「一次関数とその利用」

演習問題

基礎レベル

1. 一次関数 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{5}$ について次の問いに答えよ。

- (1) y の増加量が 24 のときの x の増加量を求めよ。
- (2) $x > -2$ のときの y の変域を求めよ。
- (3) $-3 < y \leq 2$ のときの x の変域を求めよ。
- (4) この直線と直線 $3x - y + 2 = 0$ との交点を求めよ。
- (5) この直線と x 軸との交点を求めよ。

2. 一次関数の式の決定：以下の条件を満たす直線の式をそれぞれ求めよ。

- (1) $2x + 3y = 1$ に平行で点 $(3, -1)$ を通る直線の式
- (2) 2点 $(10, -15)$ $(20, 25)$ を通る直線の式
- (3) 2点 $(-2, 1)$ $(3, -2)$ が作る線分の垂直二等分線の式
- (4) 直線 $3x + 5y - 15 = 0$ の点 $(1, 1)$ に関して対称な直線の式

3. 下の表はある地域内における鉄道小荷物運賃を表したものである。(三重県改)

重量	運賃
0 kg 以上 10 kg 未満	550 円
10 kg 以上 20 kg 未満	680 円
20 kg 以上 30 kg 未満	820 円
30 kg 以上 50 kg 未満	1050 円
50 kg 以上の場合、20 kg までごとに	300 円ずつ増す

- (1) 運賃が 820 円であるときの小荷物の重量を x (kg) として、 x の変域を求めよ。
- (2) 小荷物の重量が 195 kg のときの運賃を求めよ。

4. 一次関数 $y = -x + a$ の定義域は $-1 \leq x \leq 1$ であり、その値域は $2b \leq y \leq b$ であるとき、 a, b の値を求めよ。(山手学院高)

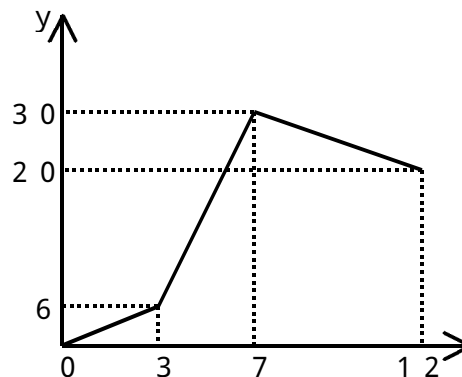
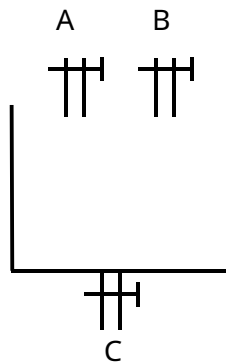
5. 点 $A(8, 0)$ 、点 $B(0, 4)$ を通る直線がある。直線 AB と直線 $x = 0$ 、直線 $y = 1$ によって囲まれた図形を x 軸のまわりに回転して出来る立体の体積を求めよ。

6. 2 地点 A, B 間の道のりは 4 km である。いま姉が午前 9 時に自転車に乗り分速 200 m で先に出発し、弟は徒歩で姉が出発してから 5 分後に分速 80 m で出発し、2 地点 A, B 間を往復する。2 人とも両地点では休まないものとする。答は、小数第一位を四捨五入し、整数で答えること。時刻は秒単位まで求めよ。

- (1) はじめて姉と弟が出会うのは A 地点から何 km の地点か。時刻も求めよ。
- (2) 2 回目に姉と弟が出会うのは A 地点から何 km の地点か。時刻も求めよ。

7. 点A(0, -1) 点B(4, 5) 点C(0, 3) 点D(0, 6)とする。直線 m は点Bを通り、傾きが -1の直線である。(千葉県改)
- (1) 直線 m の式を求めよ。
 - (2) 直線 m 上に点Pをとったところ、三角形APDの面積と四角形APBCの面積が等しくなった。このとき点Pの座標を求めよ。

8. 左下図のような水槽があり、注水管A, Bからはそれぞれ毎分一定量の水を入れることができるし、配水管Cからは毎分一定量の水を出すことができるものとする。この水槽にはじめの3分間はBとCを閉じてAから水を入れた。次の4分間はCを閉じたままAとBから水を入れた。その次の5分間は、Aを閉じてBから水を入れながらCから水を出した。その後はBも閉じてCから水を出してしまった。右下のグラフは最初水を入れ始めたから x 分後の水槽内の水の量を y リットルとして、 x と y の関係を表したものである。(熊本県)
- (1) Bから毎分何リットルの水が入ったか。
 - (2) 水槽内の水の量がはじめて25リットルになったのは最初から何分何秒後か。
 - (3) 12分後にBを閉じてから水が完全に出てしまうまでには何分何秒かかったか。

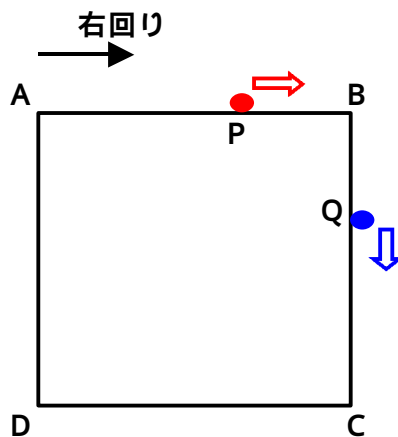


中級レベル

9. 3直線 $k: x - y + 1 = 0$, $m: x + y + 1 = 0$, $n: y = bx + 1 - b$ について次の問いに答えよ。
- (1) 直線 n は、パラメタ b がどんな値をとってもつねに定点を通ることを証明せよ。
 - (2) 3直線 k , m , n が三角形を作らないときの b の値を求めよ。
 - (3) $b = 2$ のとき、3直線 k , m , n によって出来る三角形の面積と、三角形に外接する円の中心の座標を求めよ。
10. 2点A(4, 3) B(2, -4)を結ぶ線分(両端を含む)と、直線 $mx - y - m - 3 = 0$ が共有点をもつように m の値の範囲を定めよ。
11. 4点O(0, 0) A(3, 4) B(7, 6) C(9, 0)がある。点Aを通過して四角形AOCBの面積を2等分する直線の方程式を求めよ。

12. 下図のように1辺の長さが2 cmの正方形A B C Dの辺上を運動する2点P, Qがある。点PはAを出発し、毎秒2 cmの速さで右回りに一周し、Aに到着後、左回りに一周してAに戻り、また右回りに一周し、Aに到着後、左回りに一周してAに戻り、と永久的に反復運動を繰り返す。点Qは点PがAを出発するときにBを出発し、毎秒1 cmの速さで右回りに一周し、Bに到着後、左回りに一周してBに戻り、また右回りに一周し、Bに到着後、左回りに一周してBに戻り、と永久的に反復運動を繰り返す。このとき次の問いに答えよ。(土浦日大高改)

- (1) 点Pが点Qにはじめて重なるのは出発してから何秒後か。
 (2) 点Pが点Qに2回目に重なるのは出発してから何秒後か。
 (3) 点Pが点Qに3回目に重なるのは出発してから何秒後か。
 (4) 点Pが点Qに100回目に重なるのは出発してから何秒後か。



13. A, B 2 駅間は100 kmで電車とバス路線が並行している。A 駅を太郎君はバスで、華子さんは1時間後に電車で出発し、同時にB 駅に着いた。バスははじめ時速50 kmですすんだが、途中で時速40 kmにスピードダウンしたという。電車の速さは時速80 kmで低速とするが、途中10分間停車したという。

- (1) バスがスピードダウンした地点はA 駅から何 kmの地点か。
 (2) 途中でバスと電車がすれ違ったという。電車の停車した地点のA 駅からの距離の範囲は何か。

14. 2直線 $k: y = 2x$ と $m: y = x/2$ がある。点Aはx軸の正の範囲を動き、点P, Qはそれぞれ直線 k , m 上を

$$AP : AQ = 1 : 2, \quad \angle PAQ = 90^\circ$$

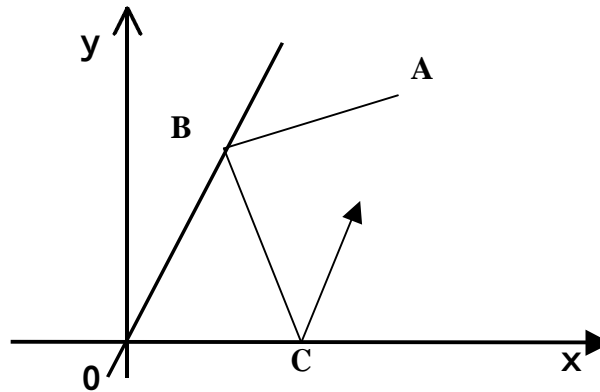
となるように動く。但し直線 k と m の変域は $x > 0$ とする。(海城高)

- (1) A(8, 0) のとき点P, Qの座標を求めよ。
 (2) A(b, 0) のとき、線分PQの midpoint Mの座標をbの式で表せ。
 (3) 長方形PAQSの頂点Sは、点Aの移動とともにどのような軌跡を描くか、軌跡の図形の方程式を求めよ。

上級レベル

15. 3本の直線 $k: bx - y + (2 - b) = 0$ 、 $m: x - by + (2b - 1) = 0$ 、 $n: x + y + 1 = 0$ がある。次の問いに答えよ。(早稲田大改)
- (1) この三直線が三角形を作らない条件を求めよ。
 - (2) (1) でないとき、この三直線が囲む三角形の面積 S を、 b を用いて表せ。
 - (3) (2) で求めた面積 S が3のとき、 b の値を求めよ。

16. 座標平面上の直線 $y = 2x$ について以下の設問に答えよ。(愛知教育大)
- (1) 点 $P(p, q)$ の直線 $y = 2x$ に関する対称点 Q の座標を p, q を用いて表せ。
 - (2) 点 $A(5, 5)$ から出発して直進する点が、点 B において直線 $y = 2x$ で反射し、次に x 軸で反射して再び A に戻るようにしたい。 B の座標をどのように取ればよいか。但し、反射の際、入射角と反射角は等しいものとする。

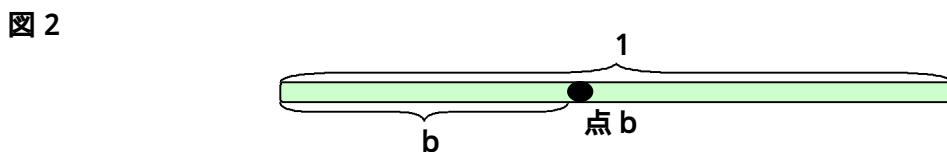
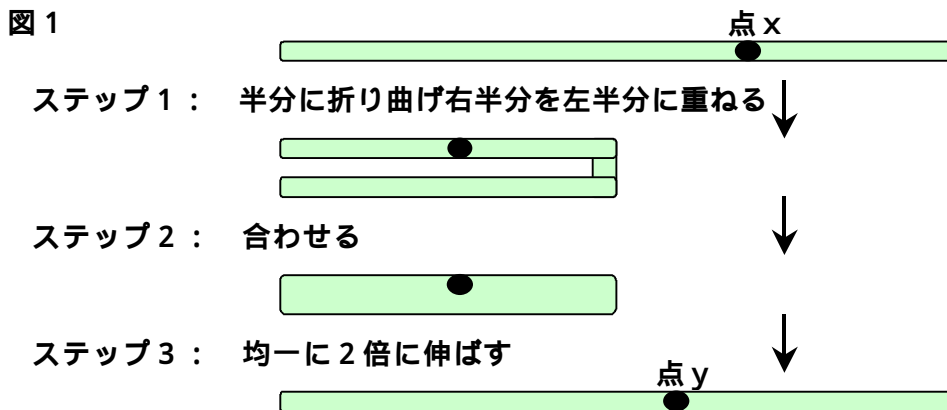


17. 3本の直線 $k: x + y = 3$ 、 $m: x + 2y = 6$ 、 $n: y = b(x + 3)$ がある。直線 k と m の交点を A 、直線 k と x 軸との交点を B 、直線 m と x 軸との交点を C とする。次の問いに答えよ。
- (1) 三角形 ABC の面積を求めよ。
 - (2) 3直線 k, m, n によって囲まれた3角形が存在するような b の値の範囲を求めよ。
 - (3) 直線 n によって三角形 ABC の面積が2等分されるとき b の値を求めよ。
18. xy 平面において、 x 座標、 y 座標がともに整数である点 (x, y) を格子点という。いま互いに異なる5個の格子点を任意に選ぶと、その中に「一対の格子点を結ぶ線分の中点がまた格子点となる」という性質を持つ格子点が少なくとも一対は存在することを証明せよ。(早稲田大)
19. 直線 $m: x - 2y + 2 = 0$ とする。点 $A(1, 3)$ 、点 $B(4, 5)$ とする。直線 m 上の点 P に対して、 $AP + PB$ の長さが最小となるように、点 P の座標を求めよ。

20. A地点から太郎が、B地点から次郎が互いに相手の出発点を折り返し点にしてA B間往復のジョギングを同時に始めた。太郎は時速 11.2 kmで走り、B地点で15分休んで折り返した。次郎は時速 8.4 kmで走り、A地点で休まずに折り返した。復路、2人はC地点で出会ったが、そこは2人が最初に出会った地点から 1.8 km離れていた。A B間及びA C間の距離をそれぞれ求めよ。(武蔵高)
21. ある製菓工場で、A, Bの2種類の製品を作るのに、それらの1箱あたりの原料および利益は下の表のようになっている。但し、この工場では1日に小麦粉は 260 kg以下、砂糖は 155 kg以下、乳製品は 300 kg以下しか使えない。このとき利益総額が最大になるようにするには、A, Bをそれぞれ何箱ずつ作ったらいいか。但し、下記の表にない諸費用は無視するものとする。

製品	原料			利益
	小麦粉	砂糖	乳製品	
A	200 g	200 g	200 g	60円
B	400 g	100 g	600 g	100円

22. 長さが1の細長いパイ生地をこねることを考える。図1のステップ1~3の手順を、パイ生地を一回「こねる」作業とする。またパイ生地の上の点で、左端からの距離が b である点を図2のように簡単に「点 b 」で表す。パイ生地を1回「こねる」と図1のように点 x は点 y に移る。例えば、点 0.7 は点 0.6 に移る。(本問題は海城高の入試問題で、以下の設問(1)及び(2)が実際に出題されているが、設問(3)以降は当塾で追加的に作題したものである。)



(設問)

- (1) 1回こねる作業により点 x は点 0.2 に移った。このような x を全て求めよ。
- (2) 2回こねる作業により点 x ははじめてもとの位置 x に戻った。考えられる x の値を全て求めよ。
- (3) 2回こねる作業により点 x (x は 0 でないとする) は点 $x/2$ に移った。このような x の値を全て求めよ。
- (4) 3回こねる作業により点 x ははじめてもとの位置 x に戻った。考えられる x の値を全て求めよ。
- (5) 点 x は1回こねると点 $f_1(x)$ 、2回こねると点 $f_2(x)$ というように、任意の自然数 n に対して n 回こねると点 $f_n(x)$ に移るとする。このとき、定義域 $0 \leq x \leq 1$ において、 $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$ の範囲に存在する 2^{n-1} 個の整数から選ばれた任意の整数 k に対して、 $f_n(x)$ は次式で与えられることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n x - 2k & \left(\frac{2k}{2^n} \leq x \leq \frac{2k+1}{2^n}\right) \\ -2^n x + 2(k+1) & \left(\frac{2k+1}{2^n} \leq x \leq \frac{2(k+1)}{2^n}\right) \end{cases}$$

- (6) 点 x を n 回こねたとき、もとの位置 x に戻るような点 x は、 2^n 個存在することを示し、そのような x の値を全て求めよ。
- (7) 任意の自然数 N に対して、 $x = 1/N$ で与えられる点は有限回のこねる作業を繰り返して点 x に戻ることが出来るか否か、理由をつけて答えよ。
- (8) 点 x を n 回こねたとき、はじめてもとの位置 x に戻るような点 x の個数を $h(n)$ とする。 $h(4)$ 、 $h(5)$ 、 $h(6)$ 、 $h(7)$ 、 $h(8)$ の各値を求めよ。
- (9) (8) から予想できる仮説を1つ述べ、その仮説が正しいか否かを数学的に論ぜよ。

23. 座標平面上に $A(14, 0)$ 、 $B(0, 22)$ 、 $C(-14, 0)$ 、 $D(0, -22)$ の4点がある。次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB 上(両端を含める)で、 (x, y) 両座標とも整数である点(格子点と呼ぶ)の個数を求めよ。
- (2) ひし形 $ABCD$ の内部(辺上は含めない)にある格子点の個数を求めよ。